

勒让德配置法求解第二类 Fredholm 积分方程组

李晓燕¹, 陈豫眉²

(1. 西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637009; 2. 西华师范大学 公共数学学院, 四川 南充 637009)

摘 要: 基于勒让德多项式, 选取均匀配置点, 提出一种求解第二类 Fredholm 积分方程组的配置法。该方法将第二类 Fredholm 积分方程组转化为未知勒让德系数的矩阵方程, 通过求解矩阵方程得到勒让德系数, 从而求得方程组的数值解。通过数值算例将其与 Bernstein 多项式展开法进行比较, 结果验证了勒让德配置法的有效性和可行性。

关键词: Fredholm 积分方程组; 勒让德配置法; 矩阵方程

中图分类号: O241.83

文献标志码: A

文章编号: 1009-1734(2025)08-0001-08

积分方程组在数学、物理、生物工程等诸多领域应用广泛, 如耦合碳纳米管的电磁建模问题^[1]、神经网络问题^[2-3]、模拟骨折愈合问题^[4]、热传导问题^[5-6]等。然而, 积分方程组的解析解往往难以求得, 因此数值求解成为探究此类问题的重要手段。近年来, 研究者们已提出多种数值方法应用于积分方程组的求解。例如: Basit 等利用 Bernstein 多项式研究线性 Fredholm 积分方程组^[7]; Navid Samadi 等使用谱方法求解线性 Volterra 积分方程组^[8]; Long 等应用多小波 Galerkin 方法探究线性 Volterra 积分方程组^[9]; Mirzaee 等利用欧拉矩阵法求解线性 Volterra 积分方程组^[10]; Wang 等利用迭代法研究非线性 Fredholm 积分方程组^[11]; Sahu 等应用 Bernstein 配置法求解非线性 Fredholm 积分方程组^[12]; Gülsu 等使用泰勒配置法求解高阶线性 Volterra - Fredholm 积分微分方程组^[13]; Alnobani 等利用 Chebyshev 小波法研究分数阶 Volterra - Fredholm 积分微分方程组^[14]; Babolian 等使用同伦摄动法研究二维非线性 Volterra - Fredholm 积分方程组^[15]。

勒让德展开法是求解积分方程组数值解的一种重要方法, 具有运算简化、计算精度高等优点。近年来, 勒让德展开法及其衍生算法在积分方程数值求解领域已取得显著进展。研究者们通过方法创新与理论拓展, 逐步将勒让德多项式应用于多种复杂积分方程类型。例如: Bildik 等提出利用勒让德展开法求解线性 Fredholm 积分微分方程^[16]; Kurt 等将该方法推广至高阶线性 Fredholm 积分方程^[17]; Nematı 通过勒让德配置法研究 Volterra - Fredholm 积分方程数值解^[18]; Saadatmandi 等利用勒让德配置法求解分数阶积分微分方程^[19]; Almasieh 等将勒让德多项式应用于二维非线性 Volterra 积分方程^[20]。

本文应用勒让德配置法对如下第二类 Fredholm 积分方程组进行求解, 并给出相应的算法。

$$f_i(x) = g_i(x) + \int_a^b \sum_{j=1}^r k_{ij}(x, t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, r, a \leq x \leq b, \quad (1)$$

式中: $g_i(x)$ 和 $k_{ij}(x, t)$ 为已知函数; $f_i(x)$ 为未知函数; $i, j = 1, 2, \dots, r$; a 与 b 为已知常数。

1 勒让德配置法求解方程组

基于勒让德多项式, 结合均匀配置点, 对方程组(1)进行如下处理:

收稿日期: 2025-03-11

基金项目: 西华师范大学项目(KH2023-061)

通信作者: 陈豫眉, 博士, 教授, 从事偏微分方程数值解研究。E-mail: xhshuxue@163.com

步骤 1: 利用勒让德多项式近似未知函数 $f_i(x)$, 将 $f_i(x)$ 表示为矩阵形式。

区间 $[a, b]$ 上的勒让德多项式为:

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a} \right)^2 - 1 \right]^k.$$

区间 $[a, b]$ 上的未知函数 $f_i(x)$ 可由勒让德多项式近似为:

$$\begin{aligned} f_i(x) &\approx f_{i,m-1}(x) = L_0(x)a_0^i + L_1(x)a_1^i + \cdots + L_{m-1}(x)a_{m-1}^i = \\ &\sum_{k=0}^{m-1} L_k(x)a_k^i = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}^i, \quad i=1, 2, \cdots, r, \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_k^i &= \frac{2k+1}{b-a} \int_a^b f_i(x) L_k(x) dx, \\ \mathbf{L}(x) &= [L_0(x) \quad L_1(x) \quad \cdots \quad L_{m-1}(x)], \\ \mathbf{A}^i &= [a_0^i \quad a_1^i \quad \cdots \quad a_{m-1}^i]^T. \end{aligned}$$

步骤 2: 利用 $f_i(x)$ 的矩阵形式, 将方程转化为矩阵形式。

将式(2)代入式(1), 得

$$\mathbf{L}(x)\mathbf{A}^i = \mathbf{g}_i(x) + \int_a^b \sum_{j=1}^r k_{ij}(x, t) \mathbf{L}(t) \mathbf{A}^j dt, \quad i=1, 2, \cdots, r.$$

从而可得

$$\mathbf{L}(x)\mathbf{A}^i = \mathbf{g}_i(x) + \int_a^b \mathbf{K}^i(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \mathbf{A}^* dt, \quad i=1, 2, \cdots, r, \quad (3)$$

式中,

$$\mathbf{K}^i(x, t) = [k_{i1}(x, t) \quad k_{i2}(x, t) \quad \cdots \quad k_{ir}(x, t)].$$

由 Kronecker 矩阵乘法法则^[21], 得

$$\mathbf{K}^i(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) = [k_{i1}(x, t)\mathbf{L}(t) \quad k_{i2}(x, t)\mathbf{L}(t) \quad \cdots \quad k_{ir}(x, t)\mathbf{L}(t)],$$

$$\mathbf{A}^* = [\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{A}^2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^r]^T = [a_0^1 \quad a_1^1 \quad \cdots \quad a_{m-1}^1 \quad a_0^2 \quad a_1^2 \quad \cdots \quad a_{m-1}^2 \quad \cdots \quad a_0^r \quad a_1^r \quad \cdots \quad a_{m-1}^r]^T.$$

这里, $\mathbf{L}(x)$ 是 $1 \times m$ 矩阵, $\mathbf{A}^i$ 是 $m \times 1$ 矩阵, $\mathbf{g}_i(x)$ 是 1×1 矩阵, $\mathbf{K}^i(x, t)$ 是 $1 \times r$ 矩阵, $\mathbf{K}^i(x, t) \otimes \mathbf{L}(t)$ 是 $1 \times mr$ 矩阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $mr \times 1$ 矩阵。

步骤 3: 利用单个方程的矩阵形式, 将方程组转化为矩阵形式。

由式(1)和式(3), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(x)\mathbf{A}^1 &= \mathbf{g}_1(x) + \int_a^b \mathbf{K}^1(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \mathbf{A}^* dt, \\ \mathbf{L}(x)\mathbf{A}^2 &= \mathbf{g}_2(x) + \int_a^b \mathbf{K}^2(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \mathbf{A}^* dt, \\ &\vdots \\ \mathbf{L}(x)\mathbf{A}^r &= \mathbf{g}_r(x) + \int_a^b \mathbf{K}^r(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \mathbf{A}^* dt. \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1(x) \\ \mathbf{g}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_r(x) \end{pmatrix} + \int_a^b \begin{pmatrix} \mathbf{K}^1(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \mathbf{K}^2(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{K}^r(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \end{pmatrix} \mathbf{A}^* dt,$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}(x) \end{pmatrix} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1(x) \\ \mathbf{g}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_r(x) \end{pmatrix} + \int_a^b \begin{pmatrix} \mathbf{K}^1(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \mathbf{K}^2(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{K}^r(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \end{pmatrix} dt \mathbf{A}^*。 \quad (4)$$

记

$$\mathbf{L}^*(x) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{L}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}(x) \end{pmatrix}, \mathbf{G}^*(x) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1(x) \\ \mathbf{g}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_r(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^*(x, t) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{K}^1(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \mathbf{K}^2(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{K}^r(x, t) \otimes \mathbf{L}(t) \end{pmatrix},$$

则式(4)可转化为

$$\mathbf{L}^*(x) \mathbf{A}^* = \mathbf{G}^*(x) + \int_a^b \mathbf{Q}^*(x, t) dt \mathbf{A}^*。 \quad (5)$$

式中: $\mathbf{L}^*(x)$ 是 $r \times mr$ 矩阵; $\mathbf{G}^*(x)$ 是 $r \times 1$ 矩阵; $\mathbf{Q}^*(x, t)$ 是 $r \times mr$ 矩阵。

步骤4: 取均匀配置点, 生成新的矩阵方程。

取 m 个配置点:

$$x_p = a + \frac{b-a}{m-1} p, \quad p=0, 1, \cdots, m-1。 \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 得

$$\mathbf{L}^*(x_p) \mathbf{A}^* = \mathbf{G}^*(x_p) + \int_a^b \mathbf{Q}^*(x_p, t) dt \mathbf{A}^*, \quad p=0, 1, \cdots, m-1,$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^*(x_0) \mathbf{A}^* &= \mathbf{G}^*(x_0) + \int_a^b \mathbf{Q}^*(x_0, t) dt \mathbf{A}^*, \\ \mathbf{L}^*(x_1) \mathbf{A}^* &= \mathbf{G}^*(x_1) + \int_a^b \mathbf{Q}^*(x_1, t) dt \mathbf{A}^*, \\ &\vdots \\ \mathbf{L}^*(x_{m-1}) \mathbf{A}^* &= \mathbf{G}^*(x_{m-1}) + \int_a^b \mathbf{Q}^*(x_{m-1}, t) dt \mathbf{A}^*。 \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}^*(x_0) \\ \mathbf{L}^*(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}^*(x_{m-1}) \end{pmatrix} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^*(x_0) \\ \mathbf{G}^*(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}^*(x_{m-1}) \end{pmatrix} + \int_a^b \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^*(x_0, t) \\ \mathbf{Q}^*(x_1, t) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}^*(x_{m-1}, t) \end{pmatrix} dt \mathbf{A}^*。 \quad (7)$$

记

$$\tilde{\mathbf{L}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{L}^*(x_0) \\ \mathbf{L}^*(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}^*(x_{m-1}) \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{G}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{G}^*(x_0) \\ \mathbf{G}^*(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}^*(x_{m-1}) \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}}(t) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^*(x_0, t) \\ \mathbf{Q}^*(x_1, t) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}^*(x_{m-1}, t) \end{pmatrix},$$

则式(7)可转化为

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}^* = \tilde{\mathbf{G}} + \int_a^b \tilde{\mathbf{Q}}(t) dt \mathbf{A}^*. \quad (8)$$

式中: $\tilde{\mathbf{L}}$ 是 $mr \times mr$ 矩阵; $\tilde{\mathbf{G}}$ 是 $mr \times 1$ 矩阵; $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ 是 $mr \times mr$ 矩阵。

步骤 5: 解矩阵方程, 得数值解 $f_{i,m-1}(x)$ 。

由式(8)得

$$\left(\tilde{\mathbf{L}} - \int_a^b \tilde{\mathbf{Q}}(t) dt\right) \mathbf{A}^* = \tilde{\mathbf{G}},$$

从而可得

$$\mathbf{A}^* = \left(\tilde{\mathbf{L}} - \int_a^b \tilde{\mathbf{Q}}(t) dt\right)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}. \quad (9)$$

则

$$f_{i,m-1}(x) = \mathbf{L}(x) \tilde{\mathbf{A}}_i, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad (10)$$

式中, $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 表示 $\mathbf{A}^*$ 的第 $m(i-1)+1$ 行到 mi 行。

利用勒让德多项式近似 $f_i(x)$, 结合均匀配置点, 求解第二类 Fredholm 积分方程组数值解, 其步骤如下:

(a) 设定 r, m, a, b 的值;

(b) 设置配置点 $x_p = a + \frac{b-a}{m-1}p, p=0, 1, \dots, m-1$;

(c) 利用式(9)求解矩阵 $\mathbf{A}^*$;

(d) 利用式(10)计算未知函数 $f_i(x)$ 的数值解 $f_{i,m-1}(x)$;

(e) 计算误差绝对值 $\text{err}_{i,m-1} = |f_i(x) - f_{i,m-1}(x)|$ 。

2 数值算例

通过数值算例将勒让德配置法与文献[7]中的 Bernstein 多项式展开法进行比较, 验证勒让德配置法的有效性。

例 1 求解以下第二类 Fredholm 积分方程组^[7]:

$$\begin{cases} f_1(x) = -\frac{x^2}{6} + x + \int_0^1 x^2 t^2 f_2(t) dt, \\ f_2(x) = x^3 - \frac{x}{3} + \int_0^1 x t f_1(t) dt. \end{cases}$$

其准确解为: $f_1(x) = x, f_2(x) = x^3$ 。

在例 1 中, $r=2, a=0, b=1$ 。取 $m-1=4$, 即 $m=5$, 则有

$$\mathbf{A}^* = [0.500 \ 0 \ 0.500 \ 0 \ 0.000 \ 0 \ 0.000 \ 0 \ -0.000 \ 0 \ 0.250 \ 0 \ 0.450 \ 0 \ 0.250 \ 0 \ 0.050 \ 0 \ 0.000 \ 0]^T。$$

例 1 中 $f_1(x), f_2(x)$ 的数值计算结果与文献[7]的比较结果见表 1 和表 2。

表 1 例 1 中 $f_1(x)$ 的数值计算结果与文献[7]的比较

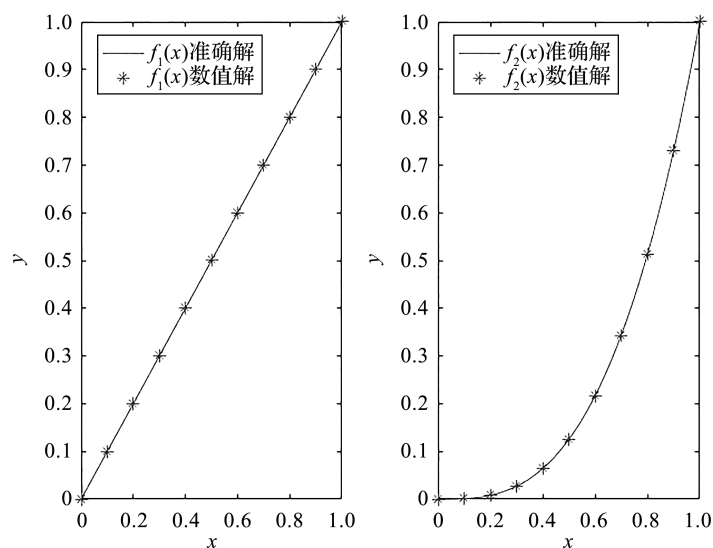
x	$f_1(x)$ 准确解	本文数值解 $f_{1,4}(x)$	本文误差 $\text{err}_{1,4}(x)$	文献[7]误差 ($n=4$)
0.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	1.70E-18	3.25E-15
0.1	0.100 000 000 0	0.100 000 000 0	1.39E-17	2.04E-14
0.2	0.200 000 000 0	0.200 000 000 0	5.55E-17	1.70E-14
0.3	0.300 000 000 0	0.300 000 000 0	1.11E-16	9.56E-16
0.4	0.400 000 000 0	0.400 000 000 0	1.67E-16	1.73E-14
0.5	0.500 000 000 0	0.500 000 000 0	1.67E-16	3.09E-14
0.6	0.600 000 000 0	0.600 000 000 0	2.22E-16	3.65E-14
0.7	0.700 000 000 0	0.700 000 000 0	2.22E-16	3.46E-14
0.8	0.800 000 000 0	0.800 000 000 0	2.22E-16	2.91E-14
0.9	0.900 000 000 0	0.900 000 000 0	3.33E-16	2.77E-14
1.0	1.000 000 000 0	1.000 000 000 0	2.22E-16	4.19E-14

表 2 例 1 中 $f_2(x)$ 的数值计算结果与文献[7]的比较

x	$f_2(x)$ 准确解	本文数值解 $f_{2,4}(x)$	本文误差 $\text{err}_{2,4}(x)$	文献[7]误差($n=4$)
0.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	1.90E-17	9.92E-16
0.1	0.001 000 000 0	0.001 000 000 0	4.34E-18	4.62E-15
0.2	0.008 000 000 0	0.008 000 000 0	6.94E-18	3.53E-15
0.3	0.027 000 000 0	0.027 000 000 0	3.47E-18	2.54E-15
0.4	0.064 000 000 0	0.064 000 000 0	0.00E+00	1.18E-14
0.5	0.125 000 000 0	0.125 000 000 0	0.00E+00	2.25E-14
0.6	0.216 000 000 0	0.216 000 000 0	0.00E+00	3.27E-14
0.7	0.343 000 000 0	0.343 000 000 0	0.00E+00	4.06E-14
0.8	0.512 000 000 0	0.512 000 000 0	0.00E+00	4.40E-14
0.9	0.729 000 000 0	0.729 000 000 0	0.00E+00	4.11E-14
1.0	1.000 000 000 0	1.000 000 000 0	0.00E+00	2.96E-14

表 1 与表 2 的数据表明,本文的方法对求解第二类 Fredholm 积分方程组具有较高的精度。

例 1 准确解与数值解的比较($m-1=4$)见图 1。

图 1 例 1 准确解与数值解的比较($m-1=4$)

例 2 求解以下第二类 Fredholm 积分方程组^[7]:

$$\begin{cases} f_1(x) = x - \frac{4}{3} + \int_{-1}^1 f_2(t) dt + \int_{-1}^1 f_3(t) dt, \\ f_2(x) = x^2 + x - \frac{2}{3} + \int_{-1}^1 f_1(t) dt + \int_{-1}^1 f_3(t) dt, \\ f_3(x) = x^3 + x^2 - \frac{2}{3} + \int_{-1}^1 f_1(t) dt + \int_{-1}^1 f_2(t) dt. \end{cases}$$

其准确解为: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2+x$, $f_3(x)=x^3+x^2$ 。

在例 2 中, $r=3$, $a=-1$, $b=1$ 。取 $m-1=4$, 即 $m=5$, 则有

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3333 & 1.0000 & 0.6667 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.3333 & 0.6000 & 0.6667 & 0.4000 & -0.0000 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

表 3 例 2 中的 $f_1(x)$ 数值计算结果与文献[7]的比较

x	$f_1(x)$ 准确解	本文数值解 $f_{1,4}(x)$	本文误差 $\text{err}_{1,4}(x)$	文献[7]误差($n=4$)
-1.0	-1.000 000 000 0	-1.000 000 000 0	2.22E-16	2.92E-14
-0.8	-0.800 000 000 0	-0.800 000 000 0	2.22E-16	6.60E-16
-0.6	-0.600 000 000 0	-0.600 000 000 0	1.11E-16	6.00E-15
-0.4	-0.400 000 000 0	-0.400 000 000 0	1.11E-16	3.51E-16
-0.2	-0.200 000 000 0	-0.200 000 000 0	1.39E-16	6.42E-15
0.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	1.67E-16	8.11E-15
0.2	0.200 000 000 0	0.200 000 000 0	1.94E-16	2.19E-15
0.4	0.400 000 000 0	0.400 000 000 0	2.22E-16	1.02E-14
0.6	0.600 000 000 0	0.600 000 000 0	1.11E-16	2.42E-14
0.8	0.800 000 000 0	0.800 000 000 0	2.22E-16	3.15E-14
1.0	1.000 000 000 0	1.000 000 000 0	2.22E-16	1.98E-14

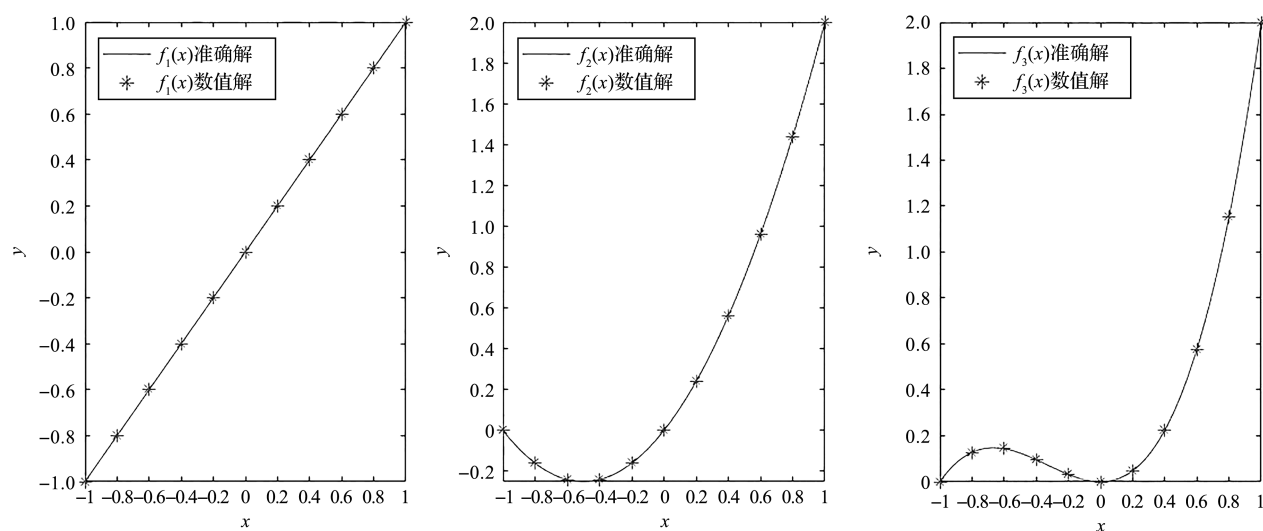
表 4 例 2 中 $f_2(x)$ 的数值计算结果与文献[7]的比较

x	$f_2(x)$ 准确解	本文数值解 $f_{2,4}(x)$	本文误差 $\text{err}_{2,4}(x)$	文献[7]误差($n=4$)
-1.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	7.65E-16	4.59E-15
-0.8	-0.160 000 000 0	-0.160 000 000 0	3.61E-16	2.26E-14
-0.6	-0.240 000 000 0	-0.240 000 000 0	1.39E-16	1.93E-14
-0.4	-0.240 000 000 0	-0.240 000 000 0	8.33E-17	8.02E-15
-0.2	-0.160 000 000 0	-0.160 000 000 0	1.11E-16	1.46E-15
0.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	5.35E-17	3.15E-15
0.2	0.240 000 000 0	0.240 000 000 0	1.11E-16	5.19E-15
0.4	0.560 000 000 0	0.560 000 000 0	3.33E-16	2.21E-14
0.6	0.960 000 000 0	0.960 000 000 0	3.33E-16	4.24E-14
0.8	1.440 000 000 0	1.440 000 000 0	4.44E-16	5.70E-14
1.0	2.000 000 000 0	2.000 000 000 0	4.44E-16	5.34E-14

表 5 例 2 中 $f_3(x)$ 的数值计算结果与文献[7]的比较

x	$f_3(x)$ 准确解	本文数值解 $f_{3,4}(x)$	本文误差 $\text{err}_{3,4}(x)$	文献[7]误差($n=4$)
-1.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	3.21E-16	1.62E-14
-0.8	0.128 000000 0	0.128 000 000 0	1.39E-16	9.88E-15
-0.6	0.144 000 000 0	0.144 000 000 0	5.55E-17	7.63E-15
-0.4	0.096 000 000 0	0.096 000 000 0	2.78E-17	6.41E-15
-0.2	0.032 000 000 0	0.032 000 000 0	1.39E-17	2.05E-14
0.0	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	2.54E-17	2.80E-14
0.2	0.048 000 000 0	0.048 000 000 0	4.16E-17	2.69E-14
0.4	0.224 000 000 0	0.224 000 000 0	2.78E-17	2.01E-14
0.6	0.576 000 000 0	0.576 000 000 0	0.00E+00	1.55E-14
0.8	1.152 000 000 0	1.152 000 000 0	2.22E-16	2.58E-14
1.0	2.000 000 000 0	2.000 000 000 0	2.22E-16	6.85E-14

表 3、表 4 与表 5 的数据表明,本文的方法对求解第二类 Fredholm 积分方程组具有较高的精度。

图 2 例 2 准确解与数值解的比较($m-1=4$)

3 结语

利用勒让德配置法将第二类 Fredholm 积分方程组转化为矩阵方程,从而通过矩阵运算求得未知函数数值解。通过数值算例将勒让德配置法与文献[7]中的 Bernstein 多项式展开法进行比较分析,结果验证了勒让德配置法的有效性和可行性。

参考文献:

- [1] AIDI M, AGUILI T. Electromagnetic modeling of coupled carbon nanotube dipole antennas based on integral equations system[J]. Progress in Electromagnetics Research M, 2014, 40: 179 - 183.
- [2] JAFARIAN A, MEASOOMY S, ABBASBANDY S. Artificial neural networks based modeling for solving Volterra integral equations system[J]. Applied Soft Computing, 2015, 27: 391 - 398.
- [3] JAFARIAN A, MEASOOMY NIA S. Utilizing feed - back neural network approach for solving linear Fredholm integral equations system[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5027 - 5038.
- [4] LU Y F, LEKSZYCKI T. A novel coupled system of non - local integro - differential equations modelling Young's modulus evolution, nutrients' supply and consumption during bone fracture healing[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik, 2016, 67(5): 111.
- [5] ZIENIUK E, SAWICKI D, BOLTUC A. Parametric integral equations systems in 2D transient heat conduction analysis [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, 78: 571 - 587.
- [6] SVETUSHKOV N N. Iterative method for the numerical solution of a system of integral equations for the heat conduction initial boundary value problem [J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, 158: 012091.
- [7] BASIT M, KHAN F. An effective approach to solving the system of Fredholm integral equations based on Bernstein polynomial on any finite interval[J]. Alexandria Engineering Journal, 2022, 61(4): 2611 - 2623.
- [8] NAVID SAMADI O R, TOHIDI E. The spectral method for solving systems of Volterra integral equations[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2012, 40(1): 477 - 497.
- [9] LONG H V, JEBREEN H B, TOMASIELLO S. Multi - wavelets Galerkin method for solving the system of Volterra integral equations[J]. Mathematics, 2020, 8(8): 1369.
- [10] MIRZAEI F, BIMESL S. A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with

- variable coefficients[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2014, 22(2): 238 – 248.
- [11] WANG K Y, WANG Q S. Iterative method for a system of nonlinear fredholm integral equations[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 2021: 9432010.
- [12] SAHU P K, SAHA RAY S. A new numerical approach for the solution of nonlinear Fredholm integral equations system of second kind by using Bernstein collocation method[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(2): 274 – 280.
- [13] GÜLSU M, SEZER M. Taylor collocation method for solution of systems of high – order linear Fredholm – Volterra integro – differential equations[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2006, 83(4): 429 – 448.
- [14] ALNOBANI M, ABU AL YAQIN O. An approximate analytical approach for systems of fredholm integro – differential equations of fractional order[J]. International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2021, 15: 91 – 104.
- [15] BABOLIAN E, DASTANI N. He’s Homotopy perturbation method; an effective tool for solving a nonlinear system of two – dimensional Volterra – fredholm integral equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 55(3/4): 1233 – 1244.
- [16] BILDIK N, KONURALP A, YALÇINBAŞ S. Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro – differential equations [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(6): 1909 – 1917.
- [17] KURT N, SEZER M. Polynomial solution of high – order linear Fredholm integro – differential equations with constant coefficients[J]. Journal of the Franklin Institute, 2008, 345(8): 839 – 850.
- [18] NEMATI S. Numerical solution of Volterra – Fredholm integral equations using Legendre collocation method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 278: 29 – 36.
- [19] SAADATMANDI A, DEHGHAN M. A Legendre collocation method for fractional integro – differential equations[J]. Journal of Vibration and Control, 2011, 17(13): 2050 – 2058.
- [20] ALMASIEH H, MELEH N J. Numerical solution of a class of mixed two – dimensional nonlinear Volterra – Fredholm integral equations using multiquadric radial basis functions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 260: 173 – 179.
- [21] TOHIDI E. Taylor matrix method for solving linear two – dimensional Fredholm integral equations with Piecewise Intervals[J]. Computational and Applied Mathematics, 2015, 34(3): 1117 – 1130.

The Legendre Collocation Method for Solving the System of Fredholm Integral Equations of the Second Kind

LI Xiaoyan¹, CHEN Yumei²

(1. School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China;

2. School of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: Based on Legendre polynomials, by selecting uniform collocation points, a collocation method for solving the system of Fredholm integral equations of the second kind is proposed. By this method, the system of Fredholm integral equations of the second kind is transformed into a matrix equation of unknown Legendre coefficients. The Legendre coefficients are obtained by solving the matrix equation, and thus the numerical solution of the system is obtained. Through numerical examples, comparing with the Bernstein polynomial approximation method, it is illustrated that this method has higher effectiveness and feasibility.

Keywords: system of Fredholm integral equations; Legendre collocation method; matrix equation

[责任编辑 高俊娥]