

# 高中数学思维可视化课堂的建构

——以“抛物线”教学为例

郭梦婷<sup>1</sup>, 吴利敏<sup>2</sup>

(1. 海宁市第一中学, 浙江 嘉兴 314000; 2. 湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州 313000)

**摘要:**以“抛物线”教学为例,建构高中数学思维可视化课堂,利用实物教具、信息手段、图示技术3种可视化策略,将隐性的思维路径直观地呈现出来,以实现“折”“绘”“图”3个教学环节的可视化,达到教学过程、教学方式、教学内容的全面可视化,减少学生的认知负荷,促进知识内化,推动深度学习,从而提升课堂教学效率。

**关键词:**思维可视化课堂;实物教具;信息手段;图示技术

**中图分类号:**G633

**文献标志码:**A

**文章编号:**1009-1734(2022)10-0092-08

## 0 引言

数学研究的对象是抽象概括的,学生学习的过程需要将抽象的问题形象化、具体化。高中数学课堂的传统教学方式是教师讲授知识点,在完成单向传递后,让学生进行大量的练习。这样的课堂教学环境沉闷,学生的学习效果较差。以“抛物线”教学为例,若教师在教学时直接给出“抛物线”的概念,再让学生通过课堂练习进行巩固,看似完成了预定的教学目标,但在实际作业批改中发现,有关“抛物线”概念的简单应用题仍有很大一部分学生出错,教学效率低下。

《国务院办公厅关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》指出:“深化课堂教学改革要积极探索基于情境、问题导向的互动式、启发式、探究式、体验式等课堂教学”。为提升学生的数学思维能力,提高教学效率,实现深度学习,教师需要改变传统的教学方式,借助教具、信息技术、图示等建构高中数学思维可视化课堂,将抽象的思维过程形象地传递给学生<sup>[1]</sup>,使学生在可视化情景中自主体验、自主探究。

## 1 高中数学思维可视化课堂的建构范式

思维可视化(visualization)是利用图示、图像等辅助工具和信息技术,将隐性的思维路径显性地表达出来。高中数学思维可视化课堂的建构是通过实物教具、信息手段、图示技术3种可视化策略,将思维路径直观地呈现出来,以实现教学过程、教学方式、教学内容的全面可视化,从而构建完整的知识体系。高中数学思维的输出需要不同的表达方式,3种可视化策略不仅能使教学方式可视化,更重要的是利用实物教具、信息手段进行动手操作和演示实践。教师可以从操作过程中捕捉学生学习的思维状态,学生可以从操作活动中探析概念生成的思维路径,从而使得教学过程可见。而利用图示技术(包括概念图、流程图、思维导图等)呈现思考过程,则可以建立知识框架,梳理内在联系,厘清解题逻辑,能使教学内容直观呈现。

在高中数学课堂中,思维可视化是指将抽象的数学思维路径直观地呈现出来,从而揭露数学本质;在以学为中心的课改导向下,思维可视化课堂强调利用情景、教具等学习环境要素充分发挥学生的主动性,使学生以“研究者”的身份参与到“发现数学”的过程中;在国家培养拔尖人才的育人思路下,思维可视化课堂变被动的接受式学习为主动的探索式学习,使创新性思维的培养得以变现。高中数学思维可视化课堂的建构范式如图1所示。

收稿日期:2022-04-02

基金项目:浙江省“十三五”高校优势专业建设项目(070101)。

通信作者:吴利敏,讲师,研究方向:中学数学教育。E-mail:wlm@zjhu.edu.cn

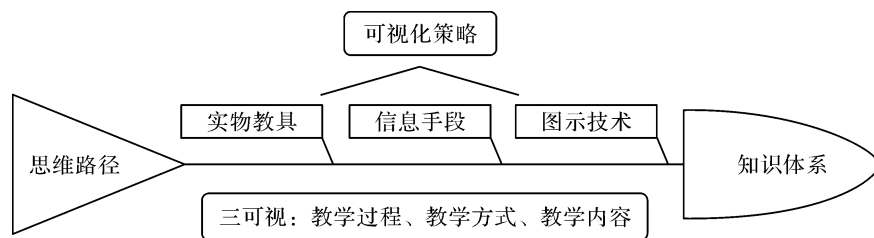


图1 高中数学思维可视化课堂的建构范式

Fig. 1 The construction paradigm of high school mathematical thinking visualization class

## 2 高中数学思维可视化课堂的实践

在高中数学思维可视化课堂中,3种可视化策略可以并用,也可以交替使用,根据不同的教学情景,教师需要进行合理地选择.下面以“抛物线”教学为例,建构高中数学思维可视化课堂.

### 2.1 实物教具:减少认知负荷

在物理、化学的教学中,教师常常会借助实物教具进行实验,使学生在观察和分析中习得知识.一般来说,学生对数学学习的认识就是概念、公式、解题,但实际上,除了抽象的逻辑推理外,很多概念定理的产生都是通过实验得到的<sup>[2]</sup>.实物教具的使用能够让思维路径通过实物外显出来,使学生体验概念形成的过程,减少学生的认知负荷.

**教学环节1 “折”纸游戏,体验过程——推进知识发生的可视化.**

#### 2.1.1 动手实验,初步感知

课前给学生发一张标有点 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\dots$ 、 $J$ 的长方形纸,其中点 $A$ 、 $B$ 、 $\dots$ 、 $J$ (除点 $F$ 外)不均匀地分布在长方形的一条边上( $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 与 $J$ 、 $I$ 、 $H$ 、 $G$ 分别关于点 $E$ 对称),点 $F$ 靠近标有点 $A$ 、 $B$ 、 $\dots$ 、 $J$ (除点 $F$ 外)的边,且左右居中,并让学生在课前折出过点 $A$ 且垂直点 $A$ 所在边的垂线.此处,限制点的数目是为控制折纸时间,避免折痕过多造成干扰,而设置点的位置排布是为让学生在课堂上能较快地看到一条明显的抛物线,点 $A$ 、 $B$ 、 $\dots$ 、 $J$ (除点 $F$ 外)对称分布能让抛物线更加完整,点 $F$ 靠近标有点 $A$ 、 $B$ 、 $\dots$ 、 $J$ (除点 $F$ 外)的一边能让抛物线更加陡峭清晰,课前折好垂线则有利于学生快速折纸标点,并能帮助学生较快地发现抛物线的定义.在课堂上,在学生认识“抛物线”前,让学生先玩一个“折纸”游戏(如图2):①把 $A$ 点对折到 $F$ 点,使两点重合,并用力按压得到折痕;②标出折痕与过 $A$ 点垂线的交点;③重复以上步骤,把所有的点对折到 $F$ 点,标出交点,让学生观察这些点连成的光滑曲线是什么图形.经观察,学生发现折纸的结果是抛物线,如图3所示.

折纸游戏不仅能激发学生的求知欲和学习的主动性,还能通过实物教具的可视化策略,使学生直观地感知抛物线的概念.

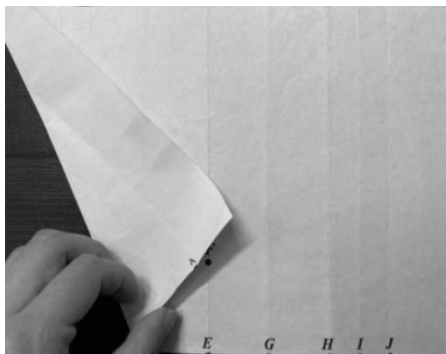


图2 折纸游戏

Fig. 2 Origami games

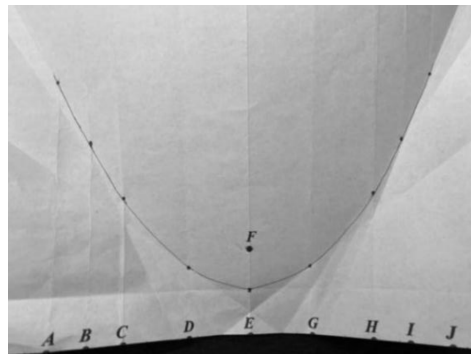


图3 折纸结果

Fig. 3 Origami results

### 2.1.2 类比分析,思考缘由

在学生观察到实验结果后,教师引导学生分析实验过程,再探折纸游戏,类比椭圆、双曲线的定义进行思考:抛物线是否跟椭圆、双曲线一样是通过两个定点来定义的?折纸过程涉及到的关键元素是什么?有的学生认为关键元素是点  $A, B, C, \dots, J$ ,有的学生认为是点  $F$  和直线  $AB$ .此时,教师追问:到底是直线  $AB$ ,还是  $A, B, \dots, J$  (除点  $F$  外)这9个点?这些点有什么共同特点?学生通过观察分析发现,这9个点(除点  $F$  外)都在直线  $AB$  上,如果在直线  $AB$  上再找一个点对折到点  $F$ ,得到的交点还是在抛物线上<sup>[3]</sup>.

学生通过类比分析、自主学习,发现抛物线是通过一个定点和一条定直线来定义的.而在传统的“抛物线”授课中,教师直接给出“抛物线”的定义,或利用几何画板直接给出一个定点、一条定直线,演示到定点和定直线距离相等的点的轨迹是抛物线.在此过程中,学生事先不知道抛物线的几何定义,而是教师直接给出的定点、定直线,并不是学生自主发现的.这个过程只是对抛物线定义的验证,不符合数学认知发现的逻辑.折纸游戏——实物教具的使用将接受式的学习方式转变为发现式,能充分体现学生的主体性.

## 2.2 信息手段:促进知识内化

随着信息技术的发展,教室已普遍多媒体化,高中数学思维可视化课堂的建构不仅有电脑、投影仪、电子白板、电脑黑板一体机等硬件方面的支持,还有几何画板、GeoGebra 等软件方面的支撑.在呈现复杂的计算过程、图像的动态变化、几何模型的结构时,教师常常会使用信息技术手段实现可视化教学,以提升课堂教学效率<sup>[4]</sup>.利用信息手段进行教学,不仅能使学生认识到数学多元联系、数形相融的特征,直观感受数学的外在美,还能深刻地领悟数学的内在真,从而促进知识的内化.

**教学环节 2 模拟“绘”图,生成概念——促进知识形成的可视化.**

### 2.2.1 模拟情景,生成定义

学生已经发现在直线  $AB$  上再找一个点对折到点  $F$ ,得到的交点还是在抛物线上.此时,再取点折纸就比较耗时,且意义不大.教师可以利用几何画板来模拟折纸的过程,在这些点之间再取一些点对折到点  $F$ ,标出交点.学生观察发现,标出的点越多,曲线就越清晰(如图4),当取到无数多的点时,标出的无数多个交点就连成了一条抛物线(如图5).教师可通过几何画板的演示,进一步说明给出的9个点看似是定点,但实质是一条定直线.

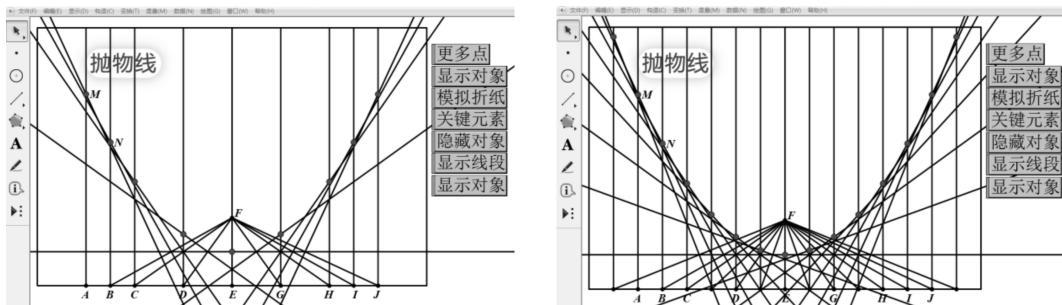


图4 几何画板模拟折纸

Fig. 4 Using GSP to simulate origami

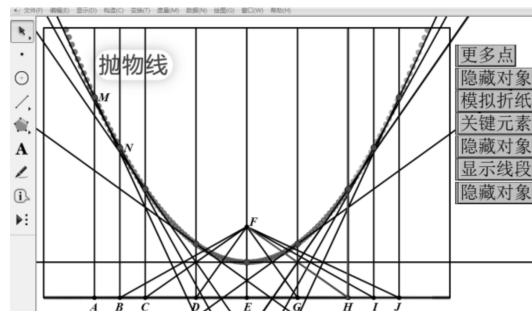


图5 几何画板模拟折纸

Fig. 5 Using GSP to simulate origami

聚焦其中一个交点,将几何画板上其余的点线隐藏(如图6),让学生思考这个交点  $M$  有什么特点? 学生观察发现,折痕为线段  $AF$  的中垂线,由于中垂线上的点到  $A$ 、 $F$  两点的距离相等,所以  $MA = MF$ . 此时,教师追问:抛物线上的点与定点  $F$ 、定直线  $AB$  有什么关系? 学生能够自己归纳出抛物线的定义.

在上述定义生成的过程中,从实际折纸标出离散的点到画板演示形成连续的曲线,体现了从有限到无限的过程,是教学的难点. 教师利用几何画板模拟数学折纸的情景,动态展示了点动成线的过程,突破了教学的难点. 信息可视化策略将难以实践讲清的过程变得形象直观,使得定义的生成顺理成章.

### 2.2.2 数形结合,揭示数理

在明确定义之后,学生要用解析几何的手段找到标准方程. 回忆标准方程的产生过程:建系、设点、列式、化简. 学生在建立直角坐标系时会采取不同的方案. 设焦点到准线的距离为  $p$  ( $p > 0$ ), 选取常见的3种方案(如图7),学生通过列式计算得到对应的3个方程:  $y^2 = 2px - p^2$ ;  $y^2 = 2px$ ;  $y^2 = 2px + p^2$ . 显然,第2个方程体现了数学的简洁美,被称为抛物线的标准方程. 此处,教师可以选取更一般的二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与抛物线  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), 借助几何画板的平移动态演示(如图8)说明二者之间的联系,进而说明这3个方程在本质上并没有什么区别,  $\pm p^2$  仅体现了图像的左右平移变换.

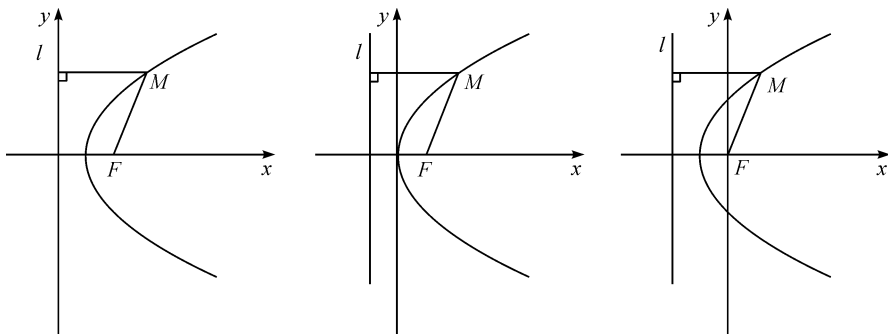


图7 建系的3种方案

Fig. 7 Three schemes of building a department

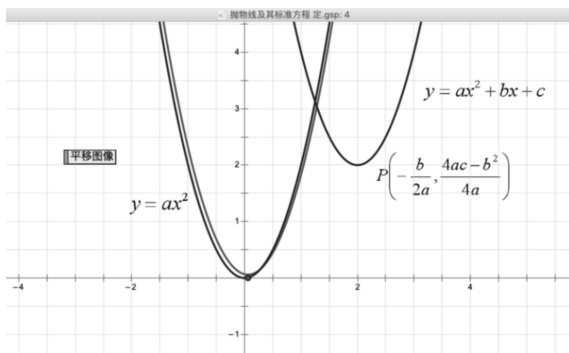


图8 图像平移动态演示

Fig. 8 Dynamic demonstration of image translation

教师利用几何画板动态演示二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与抛物线  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) 的内在联系,揭示数学的本质,建立初高中知识的联系,提升了学生的思维水平,使其从浅层学习转向了深度学习.

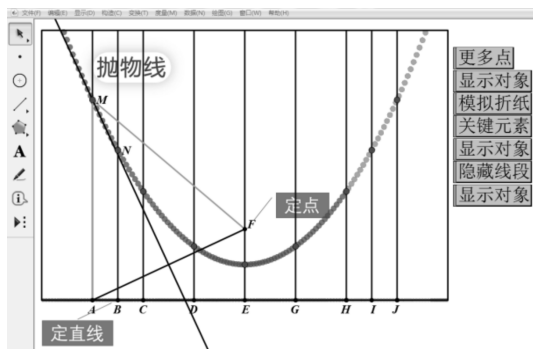


图6 聚焦抛物线上某点

Fig. 6 Focus on a point on a parabola



### 2.3 图示技术:推动深度学习

在日常教学活动中,教师可利用概念图、流程图、思维导图、树状图、鱼骨图等图示技术使思维可视化.不同的图示技术具有不同的作用功能,如:概念图可以构建知识框架;流程图可以厘清操作脉络;思维导图可以体现各思维阶段的隶属层级关系等.合理选择图示技术进行可视化教学,可以大大提升教学质量<sup>[5]</sup>.

**教学环节3 构“图”梳理,归纳应用——呈现知识系统的可视化.**

#### 2.3.1 思维导图,建构知识

随着教学环节的推进,教师在黑板上逐渐呈现出“抛物线”的思维导图(如图9),并利用思维导图将教材的知识、学生的认知、教师的导学结合在一起,将繁杂的知识条理化,将抽象的概念可视化.思维导图有层次、有重点,有利于学生建构完整的知识体系.

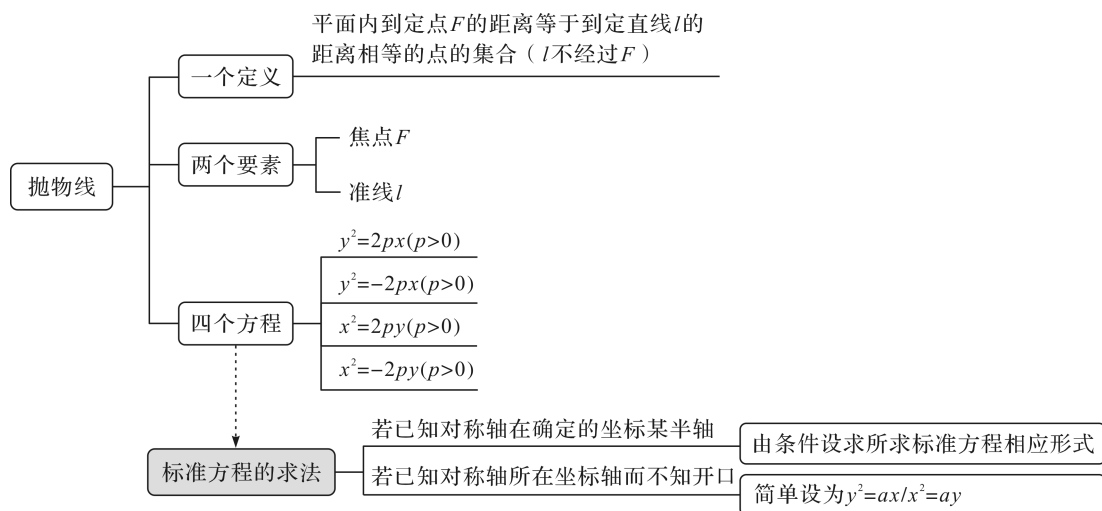


图9 抛物线思维导图

Fig. 9 Parabolic mind map

#### 2.3.2 流程图示,解决问题

下面以“抛物线”的一道练习题为例:

已知直线  $l_1: 4x - 3y + 6 = 0$  和直线  $l_2: x = -1$ ,  $P$  是抛物线  $y^2 = 4x$  上的一个动点,则点  $P$  到直线  $l_1$  和直线  $l_2$  的距离之和的最小值是\_\_\_\_\_.

利用流程图呈现两种解题思维路径,见图10、图11和图12.教师可以通过几何画板动态演示对思路进行直观验证.

教学预设的思路一、思路二是在课堂上生成的.由此可见,思维可视化是教材、教师、学生3方面共同促进的,可视化教学体现了学生的主体地位.利用流程图将学生的解题思路可视化地呈现出来,能建构题目与题目、题目与知识、题目与方法之间的联系,有效提升学生的解题能力.

## 3 高中数学思维可视化课堂的教学建议

### 3.1 把握可视化呈现的方式

在高中数学的教学过程中,运用实物教具、信息手段、图示技术等可视化策略,能够帮助学生直观形象地理解抽象的概念.但教师要注意可视化策略的使用,其最终目的是要从可视化的操作过程中归纳总结出抽象的概念.如果教师对高中数学思维可视化课堂的理解仅停留在实物教具、信息手段、图示技术等表面上的可视化功能层面,不仅不能提高课堂效率,反而会产生一些负面作用.如:在“抛物线”教学时,若教师在展示一些桥梁建筑图片后直接给出抛物线的概念,部分学生在观看图片时不仅无法认识抛物线的本质,而且会沉浸在图片的欣赏中.因此,思维可视化课堂的建构需要教师把握可视化呈现的方式与时机,使整个教学过程、教学方式、教学内容全面可视化.

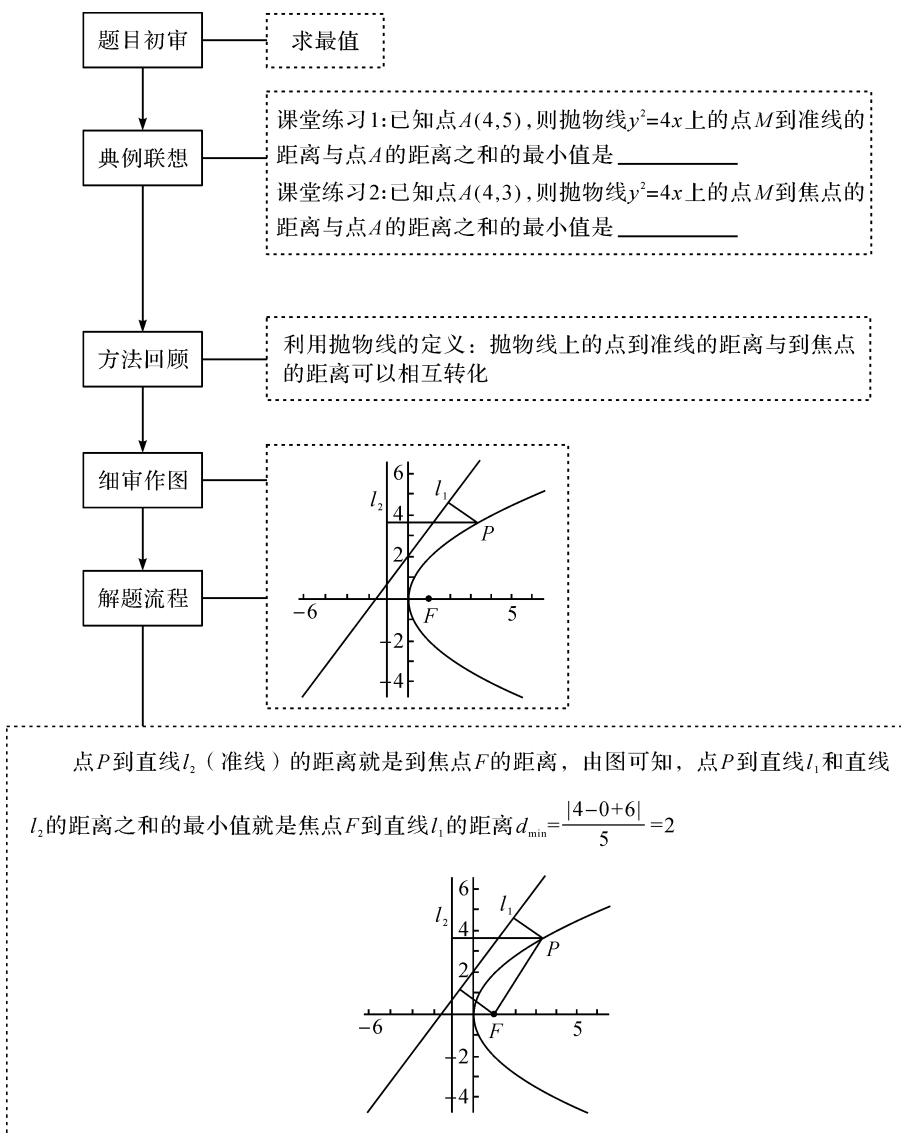


图 10 思路一

Fig. 10 Train of thought I

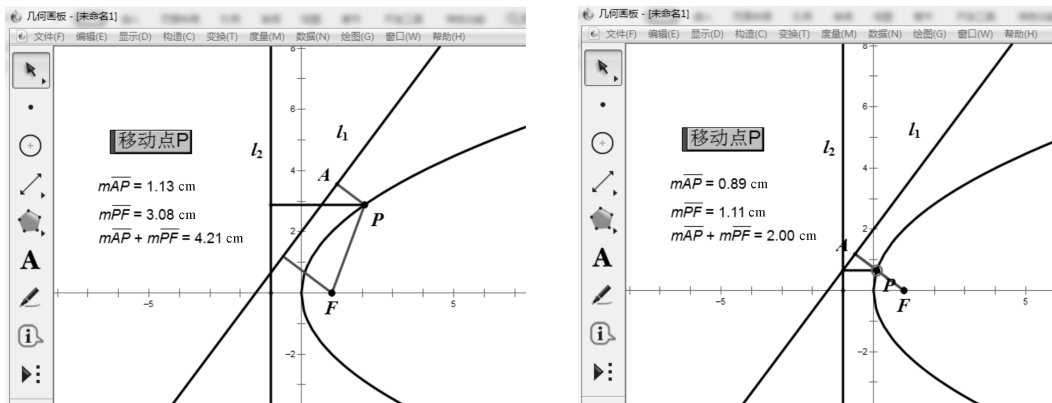


图 11 几何画板演示思路一

Fig. 11 Using GSP to demonstrate train of thought I

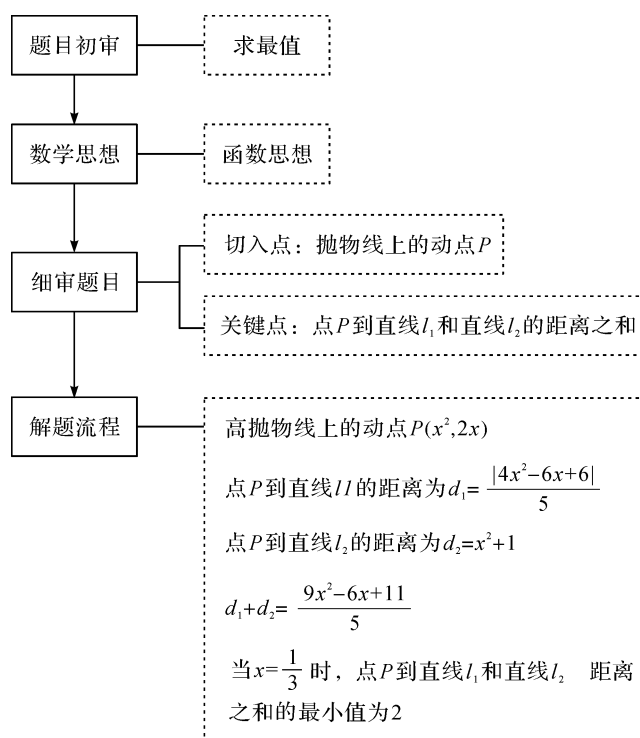


图 12 思路二

Fig. 12 Train of thought II

### 3.2 关注可视化教学的生成

在教学前,教师需要对思维可视化课堂进行精心设计.但在真正落实可视化教学时,教师必须关注学生学习的过程,关注可视化教学的生成.如:在课堂上绘制思维导图时,教师不能因过度关注思维导图的预设呈现而忽视学生的反馈,在思维导图上应生成一些学生的易错点、注意点等<sup>[6]</sup>;在讲解练习题时,教师不能简单地把自己预设的流程图讲授给学生,而应从学生的思维方式进行切入讲解题目.学生是思维可视化课堂的主体,教师只是引导者,只有关注可视化教学的生成,才能使思维可视化课堂焕发活力.

### 3.3 遵循可视化思维的规律

思维可视化课堂的教学策略必须遵循思维发展规律,否则会抑制学生思维的训练,适得其反.如:在讲解抛物线的概念时,教师利用几何画板展示抛物线动态生成的过程,此过程虽然步骤简单,且容易提炼抛物线的概念,但不符合学生的认知规律.对比以“折纸”引入的抛物线课例,从学生的课后作业情况可以发现,经深度思考生成的概念,学生在解题时更容易抓住抽象概念的本质属性,也更能提升自身的数学思维能力.

## 4 结语

通过“抛物线”课堂教学实证,高中数学思维可视化课堂的建构打破了传统的教学模式,实物教具、信息手段、图示技术让思维路径得以直观地呈现,减少了学生的认知负荷,促进了知识内化,推动了深度学习.在具体的课堂教学实践中,知识的加工需要选择合适的思维可视化策略.因此,高中数学教师要灵活运用思维可视化策略,建构思维可视化课堂,发展学生的数学思维,让学生真正体会探索性学习的乐趣.

### 参考文献:

- [1] 樊晓嵘.高中数学教学中使用思维可视化工具的必要性和有效性[J].林区教学,2018(7):102-103.

- [2] 冯伟贞. 高中数学实验活动选编[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 1-2.
- [3] 吕增锋. “同课同构”: 给教学注入“工匠精神”——以“抛物线及其标准方程”为例[J]. 中学数学教学参考, 2017(10): 65-67.
- [4] 廖小琴. 信息技术下的高中数学可视化 U 型教学模式——以“与圆有关的最值问题”专题复习课为例[J]. 中学数学教学参考, 2020(Z1): 75-77.
- [5] 陈恒曦. 高中数学思维可视化对培养学生数学核心素养的案例研究[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2020(16): 13-16.
- [6] 沈凯明, 吴利敏. “四环透视法”在四类教学环节中的运用[J]. 湖州师范学院学报, 2019, 41(12): 93-99.

## The Construction of High School Mathematical Thinking Visualization Class

——Taking “Parabola” as an Example

GUO Mengting<sup>1</sup>, WU Limin<sup>2</sup>

(1. Haining NO. 1 Middle School, Jiaxing 314000, China;

2. School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, China)

**Abstract:** In this paper, taken “parabola” as an example, a visualization class for high school mathematical thinking is constructed, and the three visualization strategies such as physical teaching tools, information means, and graphic technologies are used to intuitively present the implicit thinking path. As a result, the visualization of the three teaching links of “folding”, “drawing” and “picture” can be realized, a comprehensive visualization of the teaching process, teaching method and teaching content can be reached, the cognitive load of students can be reduced, the knowledge internalization can be promoted, the deep learning can be advanced, and the classroom teaching efficiency can be improved.

**Keywords:** thinking visualization class; physical teaching tools; information means; graphic technologies

[责任编辑 高俊娥]