单调测度的绝对连续性

韦　叶[1]，颜廷苏[2]
（1.浙江信息工程学校，浙江 湖州 313000；2.湖州师范学院 理学院，浙江 湖州 313000）

摘　要：讨论单调测度的[**E**]-型、[**L**]-型和[**R**]-型3种绝对连续性与单调测度的条件[**E**]（单调测度空间Egoroff定理成立的充分必要条件）、强序连续（单调测度空间Lebesgue定理成立的充分必要条件），以及性质(**S**)（单调测度空间Riesz收敛定理成立的充分必要条件）之间的关系.结果发现，两个单调测度之间的[**E**]-型绝对连续性与这两个测度是否满足条件[**E**]之间彼此独立，[**L**]-型和[**R**]-型绝对连续性有着类似的结论.

关键词：单调测度；绝对连续性；Egoroff定理

中图分类号：O171　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1009－1734(2022)08－0000－06

0　引言

在经典测度论[1]中，若测度μ、ν满足$\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=0$，则称$\nu$关于$\mu$是绝对连续的，记作$\nu\ll\mu$. 绝对连续性是经典测度论中一个非常重要的概念.如著名的Radon－Nikodym定理：若测度ν关于σ-有限的测度μ是绝对连续的，则存在非负可测函数f，使得

$$\nu(\mathbf{E})=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

对一切可测子集E成立，$f=\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$称为Radon－Nikodym导数.

由于单调测度一般不具有可加性[2]，因此经典测度的绝对连续性在单调测度论中有着不同的表现形式.如：文献[3]引入绝对连续的9种表现形式，并详细讨论了它们之间的关系；李军等引入单调测度的3种新的绝对连续性，即[**E**]-型、[**L**]-型和[**R**]-型绝对连续性，并利用它们建立了基于单调测度的广义Ggoroff定理、广义Lebesgue定理和广义Riesz定理，推广了在这些问题上的已有结果[4-7].

本文主要讨论单调测度的[**E**]-型、[**L**]-型和[**R**]-型3种绝对连续性与单调测度的条件[**E**]（单调测度空间Egoroff定理成立的充分必要条件）、强序连续（单调测度空间Lebesgue定理成立的充分必要条件），以及性质(**S**)（单调测度空间Riesz收敛定理成立的充分必要条件）之间的关系.

1　预备知识

本文用X表示非空集合，$\mathcal{A}$为X子集构成的σ-代数，$(X,\mathcal{A})$为可测空间.如果对任意的实数α，$\{x\mid f(x)\geqslant\alpha\}\in\mathcal{A}$，则称函数$f:X\mapsto(-\infty,+\infty)$是$\mathcal{A}$-可测的（简称可测的），全体可测函数组成的集合记为$\mathcal{F}$.

定义1[8-9]　设实值集函数$\mu:\mathcal{A}\mapsto[0,\infty]$满足：

(1) $\mu(\varnothing)=0$且$\mu(X)>0$，

收稿日期：2022－03－16
基金项目：浙江省教育厅科研项目(Y202044021).
通信作者：颜廷苏，讲师，研究方向：代数编码、非可加测度与积分.E－mail：yts@zjhu.edu.cn

(2) 当 $A \subset B$ 且 A、$B \in \mathcal{A}$ 时，$\mu(A) \leqslant \mu(B)$，
则称 μ 为单调测度，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为单调测度空间.

定义 2[4] 如果对任意的集列 $\{A_n^{(m)}\}_{m,n}$，若其满足对任意固定的 m，$A_n^{(m)} \searrow A^{(m)} (n \to \infty)$ 且 $\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{(m)}) = 0$，都存在单调递增的序列 $\{n_i\}$ 和 $\{m_i\}$，使得 $\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i}) = 0$，则称单调测度 μ 满足条件(**E**).

定义 3[5] 如果对任意的 $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$，$A \in \mathcal{A}$，$A_n \searrow A$，$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$，则称单调测度 μ 是强序连续的.

定义 4[10] 如果对任意的 $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$，$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$，都存在单调递增的序列 $\{n_i\}$，使得 $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}) = 0$，则称单调测度 μ 满足性质(**S**).

单调测度的条件(**E**)、强序连续和性质(**S**)等结构特性，是在推广经典测度论中的 Egoroff 定理、Lebesgue 定理和 Riesz 定理时引入的概念. 由于单调测度一般不具有可加性，各种收敛性都有相应的伪性版本，因此经典的 Egoroff 定理、Lebesgue 定理和 Riesz 定理在单调测度中都有 4 种表现形式. 如 Egoroff 定理的表现形式如下：

定理 1[7] 设 μ 是定义在(X, A)上的有限单调测度，则

(1) μ 满足条件(**E**)，当且仅当对任意的 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 及 $f \in \mathcal{F}$，

$$f_n \xrightarrow{\text{a. e.}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{a. u.}} f.$$

(2) $\bar{\mu}$ 满足条件(**E**)，当且仅当对任意的 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 及 $f \in \mathcal{F}$，

$$f_n \xrightarrow{\text{p. a. e.}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{p. a. u.}} f.$$

(3) μ 满足伪性条件(**E**)，当且仅当对任意的 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 及 $f \in \mathcal{F}$，

$$f_n \xrightarrow{\text{a. e.}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{p. a. u.}} f.$$

(4) $\bar{\mu}$ 满足伪性条件(**E**)，当且仅当对任意的 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 及 $f \in \mathcal{F}$，

$$f_n \xrightarrow{\text{p. a. e.}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{a. u.}} f.$$

上述定理中的 $\bar{\mu}$ 称为单调测度 μ 的对偶测度，其定义为 $\bar{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(X \backslash A)$. 为简洁起见，在上述定理中其它符号不再引入，参见文献[6]. 定理 1 涉及两个测度(尽管它们互为对偶)，为统一和推广 Egoroff 定理、Lebesgue 定理和 Riesz 定理，李军等引入了单调测度的[**E**]-型、[**L**]-型和[**R**]-型绝对连续性的概念[6].

定义 5[6] 如果对任意的集列 $\{A_n^{(m)}\}_{m,n}$，若其满足对任意固定的 m，$A_n^{(m)} \searrow A^{(m)} (n \to \infty)$ 且 $\nu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{(m)}) = 0$，都存在单调递增的序列 $\{n_i\}$ 和 $\{m_i\}$，使得 $\lim_{k\to\infty}\lambda(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i}) = 0$，则称单调测度 λ 关于单调测度 ν 是[**E**]-型绝对连续的，记作 $\lambda \ll_E \nu$.

定义 6[6] 如果对任意的集列 $\{A_n\}_n \subset A$，$A_n \searrow A$，$\nu(A) = 0$，都有 $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) = 0$，则称单调测度 λ 关于单调测度 ν 是[**L**]-型绝对连续的，记作 $\lambda \ll_L \nu$.

定义 7[6] 如果对任意的 $\{A_n\}_n \subset A$，$\lim_{n\to\infty}\nu(A_n) = 0$，都存在单调递增的序列 $\{n_i\}$，使得 $\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}) = 0$，则称单调测度 λ 关于单调测度 ν 是[**R**]-型绝对连续的，记作 $\lambda \ll_R \nu$.

利用单调测度这 3 个结构特性，李军等得到了广义 Egoroff 定理、广义 Lebesgue 定理和广义 Riesz 定理，并统一了相应定理的各种版本. 如广义 Egoroff 定理陈述如下：

定理 2[6] 设 λ、ν 为(X, A)上的单调测度，则下列两条等价：

(1) $\lambda \ll_E \nu$；

(2) 对任意的 $f \in \mathcal{F}$ 和 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$，

$$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f[\nu] \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f[\lambda].$$

当 $(\lambda,\mu)=(\mu,\mu)$ 或 $(\bar{\mu},\mu)$ 或 $(\mu,\bar{\mu})$ 时，即可得到定理 1 的 4 种情况. 故上述定理给出了 Egoroff 定理的统一形式.

2 主要结论

下面讨论两个单调测度之间的[**E**]型([**L**]型、[**R**]型) 绝对连续性与这两个单调测度是否满足条件(**E**)(强序连续、性质(**S**)) 之间的关系.

定理 3 存在单调测度 λ、ν，使得 λ 和 ν 都不满足条件(**E**)，但 $\lambda \ll_E \nu$.

证明 设 $X_1=\{1,2,\cdots\}$，$X_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$，$X=X_1 \cup X_2$，$A=2^X$. 单调测度 λ 定义为：

$$\lambda(A)=\begin{cases}0, & A \subset \{1\} \cup X_2; \\ 1, & 1 \in A \text{ 且 } A \cap (X_1-\{1\}) \neq \varnothing; \\ \max\{\frac{1}{i}: i \in E \cap X_1\}, & 1 \notin A \text{ 且 } A \cap X_1 \neq \varnothing.\end{cases}$$

单调测度 ν 定义为：

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & A \subset X_2; \\ 1, & \text{其它}.\end{cases}$$

对任意的正整数 m，令 $A_n^{(m)}=\{1,n,n+1,\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，则 $A_n^{(m)} \searrow A^{(m)}=\{1\}(n \to \infty)$，$m=1,2,\cdots$ 且 $\lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{(m)})=\lambda(\{1\})=0$. 但对 $\mathbb{N}$ 的任何单调递增子列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$，有：

$$\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i}=\{1,n_k,n_k+1,\cdots\},$$

使得 $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i})=1 \neq 0$，即 λ 不满足条件(**E**).

类似地，令 $A_n^{(m)}=\{n,n+1,\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，则 $A_n^{(m)} \searrow A^{(m)}=\varnothing(n \to \infty)$，$\nu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{(m)})=0$. 但对 $\mathbb{N}$ 的任何单调递增子列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$，$\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i} \cap X_1 \neq \varnothing$，使得 $\lim\limits_{k \to \infty} \nu(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{m_i})=1 \neq 0$，即 ν 不满足条件(**E**).

但由于存在 $\lambda \ll_E \nu$，事实上，设 $A_n^{(m)}$ 是任一满足 $A_n^{(m)} \searrow A^{(m)}$，$\nu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{(m)})=0$ 的集列，则对每一个固定的 m，$A^{(m)} \subset X_2$，必存在某个 N_m，使得 $1 \notin A_n^{(m)}$，$n>N_m$. 于是，当 $n>N_m$ 时，

$$\lambda(A_n^{(m)}) \leqslant \max_{i \in A_n^{(m)} \cap X_1} \frac{1}{i} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由此看出，存在 $\{n_i\}$ 和 $\{m_i\}$，使得

$$\lim_{k \to \infty} \lambda(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}^{(m_i)})=0,$$

即 $\lambda \ll_E \nu$.

定理 4 存在单调测度 λ、ν，使得 λ 和 ν 都满足条件(**E**)，但既没有 $\lambda \ll_E \nu$，也没有 $\nu \ll_E \lambda$.

证明 设 X、A 如定理 3，单调测度 λ、ν 定义为：

$$\lambda(A)=\begin{cases}0, & A \subset X_1; \\ \max_{\frac{1}{i} \in A \cap X_2} \frac{1}{i}, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & A\subset X_2;\\ \max_{i\in A\cap X_1}\dfrac{1}{i}, & 其它.\end{cases}$$

设 $A_n^{(m)}$ 是任一满足 $A_n^{(m)}\searrow A^{(m)}$，$\lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty}A^{(m)})=0$ 的集列，对任意的 i，由于 $A^{(i)}\subset X_1$，必存在 n_i，使得

$$\left\{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{i}\right\}\cap A_{n_i}^{(i)}=\varnothing.$$

令 $m_i=i$，则易知

$$\left\{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k}\right\}\cap\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}^{(m_i)}=\varnothing.$$

于是，$\lambda(\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i}^{(m_i)})\leqslant\dfrac{1}{k+1}\to 0(k\to\infty)$，即 λ 满足条件(**E**).

类似地，ν 也满足条件(**E**). 对任意的 m、n，取 $A_n^{(m)}=X_2$，则 $\nu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A^{(m)})=\nu(X_2)=0$. 但对任意的 $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，$\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和任意的正整数 k，$\lambda(\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i}^{(m_i)})=\lambda(X_2)=\dfrac{1}{2}$，即 $\lambda\ll_E\nu$ 不成立. 同理，$\nu\ll_E\lambda$ 也不成立.

注 1 其他可以列举出 λ 满足条件(**E**)，ν 不满足条件(**E**)，但 $\lambda\ll_E\nu$ 的单调测度 λ、ν 等. 因此，λ、ν 满足条件(**E**)与 $\lambda\ll_E\nu$ 及 $\nu\ll_E\lambda$ 之间是相互独立的.

定理 5 存在单调测度 λ、ν，使得 λ 和 ν 都不是强序连续的，但 $\nu\ll_L\lambda$.

证明 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集，σ-代数 $A=2^{\mathbb{N}}$，则定义单调测度 λ、ν：$A\mapsto[0,\infty)$ 如下：

$$\lambda(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing;\\ 1, & 其它.\end{cases}\quad \nu(A)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in A}\dfrac{1}{2^i}, & 0\notin A;\\ 0, & A\subset\{0\};\\ 2, & 其它.\end{cases}$$

由此看出，λ 不是序连续的，因而不是强序连续的. 事实上，设 $A_n=\{n,n+1,\cdots\}$，则 $A_n\searrow\varnothing$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=1\neq 0$. ν 也不是强序连续的. 设 $A_n=\{0,n,n+1,\cdots\}$，则 $A_n\searrow\{0\}$ 且 $\lambda(\{0\})=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=2\neq 0$.

由于存在 $\nu\ll_L\lambda$，事实上，设 $A_n\searrow A$，$\lambda(A)=0$，则 $A=\varnothing$. 于是，存在某个正整数 n_0，使得 $0\notin A_n(n>n_0)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in A_n}\frac{1}{2^i}=0,$$

即 $\nu\ll_L\lambda$.

证毕.

定理 6 存在单调测度 λ、ν，尽管 λ 和 ν 都是强序连续的，但既没有 $\lambda\ll_L\nu$，也没有 $\nu\ll_L\lambda$.

证明 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集，σ-代数 $A=2^{\mathbb{N}}$，定义单调测度 λ、ν：$A\mapsto[0,\infty)$ 如下：

$$\lambda(A)=\begin{cases}0, & 0\in A;\\ 1, & 其它.\end{cases}\quad \nu(A)=\begin{cases}0, & 1\notin A;\\ 1, & 其它.\end{cases}$$

设 $A_n\searrow A$，若 $\lambda(A)=0$，则 $0\notin A$. 于是存在某个正整数 n_0，使得 $0\notin A_n(n>n_0)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=0$，即 λ 是强序连续的. 同理，ν 也是强序连续的.

另一方面，设 $A_n=\{1,n,n+1,\cdots\}$，则 $A_n\searrow\{1\}$ 且 $\lambda(\{1\})=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\nu(A_n)=1$. 因此 $\nu\ll_L\lambda$ 不成立. 同理，$\lambda\ll_L\nu$ 也不成立.

证毕.

定理 7 存在单调测度 λ、ν，使得 λ 和 ν 都不满足性质(**S**)，但 $\nu\ll_R\lambda$.

证明 设 X 为全体正整数的集合，$A=2^X$，则定义单调测度 λ、ν 如下：

$$\lambda(A)=\begin{cases}1, & 1\in A \text{ 或 } A \text{ 的余集为有限集；}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\qquad \nu(A)=\begin{cases}1, & A=X；\\ 0, & A\neq X.\end{cases}$$

则 λ、ν 都不满足性质(**S**).

事实上，令

$$A_k=X\setminus(\{1\}\cup\{k,2k,3k,\cdots\}),$$

则 $\forall k,\lambda(A_k)=0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=0$. 注意到，对一切 $i\neq 1$，当 $n>i$ 时，$i\in A_n$. 于是，对任意的 $\{n_i\}$，有：

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}=X\setminus\{1\}.$$

故 $\lambda(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=1$，因而 λ 不满足性质(**S**). 令 $A_n=X\setminus\{n\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(A_n)=\nu(A_n)=0$. 注意到，当 $i\neq j$ 时，$A_i\cup A_j=X$，因此对任意的 $\{n_i\}$，$\nu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=1$，即 ν 也不满足性质(**S**).

下面证明 $\nu\ll_R\lambda$. 设 $\{A_n\}$ 为任一满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=0$ 的集列，则存在某个 N，使得 $1\notin A_n$ 对一切 $n>N$ 成立. 于是，对任意的 $\{n_i\}$，$1\notin\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i}$，使得 $\nu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$，即 $\nu\ll_R\lambda$.

定理 8 存在单调测度 λ、ν，使得 λ 和 ν 满足性质(**S**)，且 $\lambda\ll_R\nu$，但 $\nu\ll_R\lambda$ 不成立.

证明 考虑定理 1 定义的单调测度 λ、ν，设 $\{A_n\}$ 是任一满足 $\lambda(A_n)\to 0(n\to\infty)$ 的集列. 下面分两种情况证明存在 $\{n_i\}$，使得 $\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$.

(i) 存在无穷多个 A_{n} 满足 $\lambda(A_n)=0$，记这个子列为 A_{n_i}，则 $A_{n_i}\subset\{1\}\cup X_2$. 于是，$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\subset\{1\}\cup X_2$，使得 $\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$.

(ii) 至多只有有限个 A_n 满足 $\lambda(A_n)=0$，则对任意的 i，存在 n_i 使得 $0<\lambda(A_{n_i})<\frac{1}{i}$. 于是 $\{1,2,\cdots,i\}\cap A_{n_i}=\varnothing$，从而 $\{1,2,\cdots,k\}\cap\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}=\varnothing$，即 $\lambda(\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})<\frac{1}{k}$. 因此，$\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$.

由 $\{A_n\}$ 的任意性可知，单调测度 λ 满足性质(**S**). 类似地，设 $\{A_n\}$ 是任一满足 $\nu(A_n)\to 0(n\to\infty)$ 的集列，则存在 n_0，使得 $A_n\subset X_2$ 对一切 $n>n_0$ 成立，从而对任意的 $\{n_i\}$，必有 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}\subset X_2$，于是 $\nu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$，即 ν 满足性质(**S**). 注意到，当 $\nu(A)=0$ 时，必有 $\lambda(A)=0$，于是 $\lambda\ll_R\nu$.

取 $A_n=\left\{1,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\right\}$，则 $\lambda(A_n)=0$. 但对任意的 $\{n_i\}$，$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}=\{1\}$，使得 $\nu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=1$，即 $\nu\ll_R\lambda$ 不成立.

注 2 还可以举出其它例子说明 λ、ν 满足性质(**S**) 与 $\lambda\ll_R\nu$ 及 $\nu\ll_R\lambda$ 之间是彼此独立的.

3 结 语

本文讨论了单调测度 λ 和 μ 是否满足[**E**]-型([**L**]-型、[**R**]-型) 绝对连续性，以及这两个单调测度是否满足条件[**E**]、强序连续、性质(**S**) 之间的关系. 由结果可以看出，这些条件之间没有必然的联系，是彼此独立的. 今后我们将讨论[**E**]-型、[**L**]-型及[**R**]-型绝对连续性之间，以及它们与其他绝对连续性[9] 之间的关系.

参考文献：

[1] CHOQUET G. Theory of capacities[J]. Ann Inst Fourier，1953(5)：131-295.

[2] 周智慧，吕华东，陈雅，等. Choquet 积分与上泛积分等价的一个充分条件[J]. 湖州师范学院学报，2018，40(2)：1-5.

[3] WANG Z，KLIR G J，WANG W. Fuzzy measures defined by fuzzy integral and their absolute continuity[J]. Journal of

Mathematical Analysis and Applications,1996(203):150-165.
[4] LI J. A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions[J]. Kybernetika,2003,39:753-760.
[5] LI J. Order continuous of monotone set function and convergence of measurable functions sequence[J]. Appl Math Comput,2003(135):211-218.
[6] LI J,OUYANG Y,MESIAR R. Generalized convergence theorems for monotone measures[J]. Fuzzy Sets Syst,2021(412):53-64.
[7] LI J,YASUDA M. On Egoroff's theorems on finite monotone non-additive measure space[J]. Fuzzy Sets Syst,2005(153):71-78.
[8] DENNEBERG D. Non-additive Measure and Integral[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1994:86-102.
[9] PAP E. Null-Additive Set Functions[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1995:68-92.
[10] SUN Q. Property (S) of fuzzy measure and Riesz's theorem[J]. Fuzzy Sets Syst,1994(62):117-119.

Absolute Continuity of Monotone Measures

WEI Ye[1], YAN Tingsu[2]

(1. Zhejiang Information Engineering School, Huzhou 313000, China;
2. School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, China)

Abstract: The relationship of the absolute continuity of type [**E**] and the condition [**E**] for monotone measures is discussed. It is shown that one monotone measure being absolutely continuous of type [**E**] with respect to another monotone measure and these two measures satisfying condition [**E**] are independt from one to each other. The relationship of the absolute continuity of type [**L**] and strong order continuity for monotone measures, and that of the absolute continuity of type [**R**] and property (**S**) for monotone measures are also discussed.

Keywords: monotone measure; absolute continuity; egoroff theorem

[责任编辑 高俊娥]