α -块对角占优矩阵与两类迭代法的收敛性

傅河清,蔡　静,高寿兰
(湖州师范学院 理学院,浙江 湖州 313000)

摘　要:探讨两类 α -块对角占优矩阵,利用矩阵非奇异性和迭代矩阵的谱半径估计,证明当系数矩阵为这两类块对角占优矩阵时,线性方程组 $Ax=b$ 的块 Jacobi 迭代法和块 Guass - Seidel 迭代法均收敛.

关键词:块对角占优矩阵;Jacobi 迭代法;Guass - Seidel 迭代法;非奇异性;谱半径
中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1009 - 1734(0000)00 - 0000 - 00

块对角占优矩阵是具有对角占优特性的分块矩阵.对各种形式的块对角占优矩阵开展性质和迭代法研究,有助于深入了解块矩阵的性质,加快线性方程组的计算速度,降低矩阵的运算规模,使大数据处理更加方便、快捷.目前,很多文献讨论了各类对角占优矩阵的相关性质和对应线性方程组迭代法的收敛性.文献[1]证明了对角占优矩阵的非奇异性,以及当系数矩阵对角占优时解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法和 Guass - Seidel 迭代法的收敛性.文献[2]和[3]探讨了线性方程组几种常用迭代法的收敛性条件.文献[4]提出了弱块对角占优矩阵的一个等价定义.文献[5]给出了广义对角占优阵的判定条件,指出了广义对角占优阵与非奇异 H -矩阵的等价性.文献[6]利用 Ostrowski 对角占优矩阵给出了非奇异 H -矩阵的判定条件.文献[7]~[10]研究了乘幂形式和行列相加形式的 α -对角占优矩阵,并确定了这些矩阵的非奇异性,以及 Jacobi 迭代法、Guass - Seidel 迭代法、SOR 迭代法和 AOR 迭代法的收敛性.文献[11]研究了块对角占优矩阵的非奇异性,以及块 Jacobi 迭代法和块 Guass - Seidel 迭代法的收敛性.文献[12]探讨了更广泛的 α -块对角占优矩阵,得到其等价表征,并拓展了块 H -矩阵的判定条件.

本文针对两类块 α -对角占优矩阵,证明当线性方程组的系数矩阵为这两类块对角占优矩阵时,块 Jacobi 迭代法和块 Guass - Seidel 迭代法均收敛.

考虑分块矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中,$A_{kl}=(a_{ij})\in C^{n_k n_l}$,$k,l=1,2,\cdots,n$,对角线上的矩阵为方阵.

定义 1[11]　若对任意 $i=1,2,\cdots,n$,存在 $\alpha\in[0,1]$,均满足 $R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}<\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}$,其中,

$$R_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|,S_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|,$$

则称 A 为 α -幂乘块对角占优矩阵,记为 $A\in GD_1$.

定义 2[11]　若对任意 $i=1,2,\cdots,n$,存在 $\alpha\in[0,1]$,均满足

$$\alpha R_i+(1-\alpha)S_i<\|A_{ii}^{-1}\|^{-1},$$

收稿日期:2021 - 12 - 10
基金项目:教育部高校特色专业建设点(教高函〔2008121〕号);国家自然科学基金项目(11871249).
通信作者:蔡静,副教授,研究方向:数值代数.E - mail:caijing@zjhu.edu.cn

其中，
$$R_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|,S_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|,$$
则称 A 为 α -行列相加块对角占优矩阵，记为 $A\in GD_2$.

引理 1[12] 若 $A\in GD_1$，则 $\det(A)\neq 0$.

引理 2[1] 解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛的充分必要条件为：迭代矩阵的谱半径 $\rho(B)<1$.

引理 3[12] 若 $A\in GD_2$，则 $\det(A)\neq 0$.

1 主要结果

定理 1 若 $A\in GD_1$，则解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛.

证明 将 A 分裂如下：
$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=D+L+U,$$
其中，
$$D=\begin{bmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$
$$L=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\A_{21}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}0&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\0&0&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$
Jacobi 迭代矩阵为：
$$B=-D^{-1}(L+U)=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&-A_{11}^{-1}A_{12}&-A_{11}^{-1}A_{13}&\cdots&-A_{11}^{-1}A_{1n}\\-A_{22}^{-1}A_{21}&0&-A_{22}^{-1}A_{23}&\cdots&-A_{22}^{-1}A_{2n}\\-A_{33}^{-1}A_{31}&-A_{33}^{-1}A_{32}&0&\cdots&-A_{33}^{-1}A_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-A_{nn}^{-1}A_{n1}&-A_{nn}^{-1}A_{n2}&-A_{nn}^{-1}A_{n3}&\cdots&0\end{bmatrix}.$$
令 E 为 B 同阶单位矩阵，假设 $\rho(B)\geqslant 1$，则存在 B 的某一特征值 λ，满足 $\lambda|\geqslant 1$，且：
$$\det(\lambda E-B)=\det(\lambda E+D^{-1}(L+U))=0,\tag{1}$$
其中，
$$\lambda E+D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}\lambda E&A_{11}^{-1}A_{12}&A_{11}^{-1}A_{13}&\cdots&A_{11}^{-1}A_{1n}\\A_{22}^{-1}A_{21}&\lambda E&A_{22}^{-1}A_{23}&\cdots&A_{22}^{-1}A_{2n}\\A_{33}^{-1}A_{31}&A_{33}^{-1}A_{32}&\lambda E&\cdots&A_{33}^{-1}A_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{nn}^{-1}A_{n1}&A_{nn}^{-1}A_{n2}&A_{nn}^{-1}A_{n3}&\cdots&\lambda E\end{bmatrix}.$$
因为
$$R_i(\lambda E-B)^{\alpha}S_i(\lambda E-B)^{1-\alpha}=\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ji}\|\Big)^{1-\alpha}\leqslant$$
$$(\|A_{ii}^{-1}\|)^{\alpha}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|\Big)^{\alpha}(\|A_{ii}^{-1}\|)^{1-\alpha}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|\Big)^{1-\alpha}=$$

$$\|A_{ii}^{-1}\|(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|)^{\alpha}(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|)^{1-\alpha}<1\leqslant\|(\lambda E)^{-1}\|^{-1},$$

所以,当 $\lambda E-B\in GD_1$ 时,根据引理 1 得,$\det(\lambda E-B)\neq 0$. 这与式(1) 矛盾,假设不成立. 由此可得,当 $\rho(B)<1$ 时,解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛.

定理 2　若 $A\in GD_1$,则解线性方程组 $Ax=b$ 的 Guass - Seidel 迭代法收敛.

证明　将 A 作同样分裂,则 Guass - Seidel 迭代矩阵为:

$$B_G=-(D+L)^{-1}U.$$

假设 $\rho(B_G)\geqslant 1$,则存在 B_G 的某一特征值 λ,满足 $|\lambda|\geqslant 1$,且:

$$\begin{gathered}\det(\lambda E-B_G)=\det(\lambda E+(D+L)^{-1}U)=\\ \det(D+L)^{-1}\det(\lambda(D+L)+U)=\\ \det(D+L)^{-1}\det(D)\det(\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U)=0,\end{gathered}$$

从而易知 $\det(D+L)^{-1}\neq 0$,$\det(D)\neq 0$.

设 $C=\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U=\begin{bmatrix}\lambda E & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} & \cdots & A_{11}^{-1}A_{1n}\\ \lambda A_{22}^{-1}A_{21} & \lambda E & A_{22}^{-1}A_{23} & \cdots & A_{22}^{-1}A_{2n}\\ \lambda A_{33}^{-1}A_{31} & \lambda A_{33}^{-1}A_{32} & \lambda E & \cdots & A_{33}^{-1}A_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{nn}^{-1}A_{n1} & \lambda A_{nn}^{-1}A_{n2} & \lambda A_{nn}^{-1}A_{n3} & \cdots & \lambda E\end{bmatrix}$,

$$\det(C)=0. \tag{2}$$

因为

$$\begin{gathered}R_i((\lambda E)^{-1}C)^{\alpha}S_i((\lambda E)^{-1}C)^{1-\alpha}=\\ \left[\sum_{j=1}^{i-1}\|(\lambda E)^{-1}\lambda A_{ii}^{-1}A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\|(\lambda E)^{-1}A^{-1}{}_{ii}A_{ij}\|\right]^{\alpha}\times\\ \left[\sum_{j=i+1}^{n}\|(\lambda E)^{-1}*\lambda A_{ii}^{-1}A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\|(\lambda E)^{-1}A^{-1}{}_{ii}A_{ji}\|\right]^{1-\alpha}=\\ \left[\sum_{j=1}^{i-1}\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ii}^{-1}A_{ij}\right\|\right]^{\alpha}\left[\sum_{j=i+1}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ii}^{-1}A_{ji}\right\|\right]^{1-\alpha}=\\ (\|A_{ii}^{-1}\|)^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\|A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ij}\right\|\right)^{\alpha}(\|A_{ii}^{-1}\|)^{1-\alpha}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\|A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ji}\right\|\right)^{1-\alpha}=\\ \|A_{ii}{}^{-1}\|\left(\sum_{j=1}^{i-1}\|A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ij}\right\|\right)^{\alpha}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\|A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ji}\right\|\right)^{1-\alpha}\leqslant\\ \|A_{ii}{}^{-1}\|(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|)^{\alpha}(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|)^{1-\alpha}<1.\end{gathered}$$

所以,当 $(\lambda E)^{-1}C\in GD_1$ 时,根据引理 1 得,$(\lambda E)^{-1}C$、$\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U$ 均为非奇异矩阵,从而 $\det(C)\neq 0$. 这与证明中式(2) 矛盾,假设不成立. 由此可得,当 $\rho(B_G)<1$ 时,解线性方程组 $Ax=b$ 的 Guass - Seidel 迭代法收敛.

定理 3　若 $A\in GD_2$,则解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛.

证明

Jacobi 迭代矩阵为:

$$B=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} & \cdots & -A_{11}^{-1}A_{1n}\\ -A_{22}^{-1}A_{21} & 0 & -A_{22}^{-1}A_{23} & \cdots & -A_{22}^{-1}A_{2n}\\ -A_{33}^{-1}A_{31} & -A_{33}^{-1}A_{32} & 0 & \cdots & -A_{33}^{-1}A_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -A_{nn}^{-1}A_{n1} & -A_{nn}^{-1}A_{n2} & -A_{nn}^{-1}A_{n3} & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

令 E 为 B 同阶单位矩阵. 假设 $\rho(B)\geqslant 1$,则存在 B 的某一特征值 λ,满足 $|\lambda|\geqslant 1$,且:

$$\det(\lambda E-B)=\det(\lambda E+D^{-1}(L+U))=0, \tag{3}$$

其中，
$$\lambda E+D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}\lambda E & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} & \cdots & A_{11}^{-1}A_{1n}\\ A_{22}^{-1}A_{21} & \lambda E & A_{22}^{-1}A_{23} & \cdots & A_{22}^{-1}A_{2n}\\ A_{33}^{-1}A_{31} & A_{33}^{-1}A_{32} & \lambda E & \cdots & A_{33}^{-1}A_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{nn}^{-1}A_{n1} & A_{nn}^{-1}A_{n2} & A_{nn}^{-1}A_{n3} & \cdots & \lambda E\end{bmatrix}.$$

因为
$$\alpha R_i(\lambda E-B)+(1-\alpha)S_i(\lambda E-B)=$$
$$\alpha(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|)+(1-\alpha)(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ji}\|)\leqslant$$
$$\|A_{ii}^{-1}\|\alpha(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|)+\|A_{ii}^{-1}\|(1-\alpha)(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|)=$$
$$\|A_{ii}{}^{-1}\|[\alpha(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|)+(1-\alpha)(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|)]<$$
$$1\leqslant\|(\lambda E)^{-1}\|^{-1}$$

所以，当 $\lambda E-B\in GD_2$，时，根据引理3得，$\det(\lambda E-B)\neq 0$. 这与证明中式(3)矛盾，假设不成立. 由此可得，当 $\rho(B)<1$ 时，解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛.

定理4 若 $A\in GD_2$，则解线性方程组 $Ax=b$ 的 Guass - Seidel 迭代法收敛.

证明 迭代矩阵 $B_G=-(D+L)^{-1}U$.

假设 $\rho(B_G)\geqslant 1$，则存在 λ 为某一特征值，使得 $|\lambda|\geqslant 1$，则有：

$$\det(\lambda E-B_G)=\det(\lambda E+(D+L)^{-1}U)=$$
$$\det(D+L)^{-1}\det(\lambda(D+L)+U)=$$
$$\det(D+L)^{-1}\det(D)\det(\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U)=0,$$

从而易知 $\det(D+L)^{-1}\neq 0$，$\det(D)\neq 0$.

设
$$C=\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U=\begin{bmatrix}\lambda E & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} & \cdots & A_{11}^{-1}A_{1n}\\ \lambda A_{22}^{-1}A_{21} & \lambda E & A_{22}^{-1}A_{23} & \cdots & A_{22}^{-1}A_{2n}\\ \lambda A_{33}^{-1}A_{31} & \lambda A_{33}^{-1}A_{32} & \lambda E & \cdots & A_{33}^{-1}A_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{nn}^{-1}A_{n1} & \lambda A_{nn}^{-1}A_{n2} & \lambda A_{nn}^{-1}A_{n3} & \cdots & \lambda E\end{bmatrix},$$
$$\det(C)=0. \tag{4}$$

因为
$$\alpha R_i((\lambda E)^{-1}C)+(1-\alpha)S_i((\lambda E)^{-1}C)=$$
$$\alpha\left[\sum_{j=1}^{i-1}\|(\lambda E)^{-1}*\lambda A_{ii}^{-1}A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\|(\lambda E)^{-1}A^{-1}{}_{ii}A_{ij}\|\right]+$$
$$(1-\alpha)\left[\sum_{j=i+1}^{n}\|(\lambda E)^{-1}*\lambda A_{ii}^{-1}A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\|(\lambda E)^{-1}A^{-1}{}_{ii}A_{ji}\|\right]=$$
$$\alpha\left[\sum_{j=1}^{i-1}\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ii}^{-1}A_{ij}\right\|\right]+(1-\alpha)\left[\sum_{j=i+1}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ii}^{-1}A_{ji}\right\|\right]\leqslant$$
$$\|A_{ii}^{-1}\|\alpha\left[\sum_{j=1}^{i-1}\|A_{ij}\|+\sum_{j=i+1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ij}\right\|\right]+\|A_{ii}^{-1}\|(1-\alpha)\left[\sum_{j=i+1}^{n}\|A_{ii}^{-1}A_{ji}\|+\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\frac{1}{\lambda}A_{ji}\right\|\right]\leqslant$$
$$\|A_{ii}^{-1}\|(\alpha\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ij}\|+(1-\alpha)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|A_{ji}\|)<1.$$

所以，当 $(\lambda E)^{-1}C\in GD_2$，时，根据引理3得，$(\lambda E)^{-1}C$、$\lambda(E+D^{-1}L)+D^{-1}U$ 均为非奇异矩阵，从而 $\det(C)\neq 0$. 这与证明中式(4)矛盾，假设不成立. 由此可得，当 $\rho(B_G)<1$ 时，解线性方程组 $Ax=b$ 的 Guass - Seidel 迭代法收敛.

2 结论

块对角占优矩阵是对角占优矩阵在分块矩阵领域的推广，但与对角占优矩阵相关的迭代法收敛性结果并不能直接被推广到块对角占优矩阵. 本文在现有成果的基础上，探讨更具有一般性的块 α -幂乘块对角占优矩阵和块 α -行列相加块对角占优矩阵，证明了这些矩阵对应的块 Jacobi 迭代法和块 Guass - Seidel 迭代法的收敛性. 这对分块矩阵的研究和应用具有重要意义.

参考文献：

[1] 肖筱南. 现代数值计算方法(第二版)[M]. 北京：北京大学出版社，2016：50 - 55.

[2] 宋岱才，张钟员，路永洁. 某些迭代法的收敛性定理[J]. 辽宁石油化工大学学报，2008，28(3)：75 - 78.

[3] 蔡静. 一类预处理 Jacobi 迭代法及其收敛性分析[J]. 湖州师范学院学报，2019，41(8)：1 - 6. [4] 向淑晃，向淑文，张青. 对"弱块对角占优矩阵及其应用"的一点注记[J]. 工程数学学报，1997，14(4)：116 - 118.

[5] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报，1997，19(3)：216 - 233.

[6] 崔琦，宋岱才. 非奇异 H -矩阵的几个判别条件[J]. 辽宁石油化工大学学报，2007，27(2)：80 - 83.

[7] 田秋菊，宋岱才，郭小明. α -严格对角占优矩阵与 SOR 迭代法的收敛性定理[J]. 科学技术与工程，2009，9(23)：6 956 - 6 959.

[8] 宋岱才，魏晓丽，赵晓颖. α -严格对角占优矩阵与迭代法的收敛性定理[J]. 辽宁石油化工大学学报，2010，30(1)：81 - 83.

[9] 宋岱才，敬长红，陈德艳. 严格对角占优矩阵与 SOR 迭代法的收敛性定理[J]. 长春理工大学学报(自然科学版)，2011，34(1)：170 - 172.

[10] 赵晓颖，宋岱才. 双 α -对角占优矩阵与 AOR 迭代法的收敛性定理[J]. 长春理工大学学报(自然科学版)，2012，35(1)：171 - 173.

[11] 韩俊林. 对角占优矩阵、块对角占优矩阵及其相关特殊矩阵类的一些研究[D]. 湘潭：湘潭大学，2002：12 - 23.

[12] 高会双，韩贵春，肖丽霞. 块 α -对角占优矩阵的讨论[J]. 纯粹数学与应用数学，2014，30(1)：53 - 59.

α - block Diagonally Dominant Matrices and Convergence of Two Kinds of Iterative Methods

FU Heqing, CAI Jing, GAO Shoulan

(School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, China)

Abstract: Block diagonally dominant Matrix is a special kind of block matrix, which has wide application background. In this paper, two classes of α - diagonally dominant block matrices are discussed. By using the nonsingularity of the matrix and the estimation of the spectral radius of the iterative matrix, it is proved that when the coefficient matrix is the two classes of block diagonally dominant matrices, the block Jacobi iterative method and the block Guass - Seidel iterative method for system of linear equations are convergent.

Keywords: block diagonally dominant matrix; Jacobi iterative method; Guass - Seidel iterative method; nonsingularity; spectral radius

[责任编辑　高俊娥]