一个含参数半离散型的 Hilbert 型不等式

有名辉
（浙江机电职业技术学院 数学教研室，浙江 杭州 310053）

摘 要：通过构造一个包含齐次和非齐次两种形态的多参数半离散型核函数，并利用权系数的方法和实分析技巧，建立一个新的半离散型 Hilbert 型不等式．新建立不等式的常数因子经证明是最佳值．

关键词：Hilbert 型不等式；Fubini 定理；Hölder 不等式；半离散型；最佳因子
中图分类号：O178 **文献标志码：**A **文章编号：**1009－1734(2022)08－0000－00

0 引言

20 世纪初，德国数学家 Hilbert 在一次积分方程的讲座中提出一个有关二重级数的不等式[1]：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\pi\|\boldsymbol{a}\|_2\|\boldsymbol{b}\|_2, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$，$\boldsymbol{b}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$，$a_n,b_n>0$．

此后，Hardy 等[1] 引进共轭数对 (p,q)，$1/p+1/q=1$，建立了式(1)的推广：若 $\boldsymbol{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$，$\boldsymbol{b}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^q$，$a_n,b_n>0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|\boldsymbol{a}\|_p\|\boldsymbol{b}\|_q. \tag{2}$$

同时，Hardy 等[1] 还建立了式(2)积分形式的类比：若 $f(x),g(x)>0$ 且 $f\in L^p(\mathbf{R}^+)$，$g\in L^q(\mathbf{R}^+)$，则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f\|_p\|g\|_q. \tag{3}$$

式(1)被称为 Hilbert 不等式，π 是最佳常数因子．式(2)和式(3)被称为 Hilbert 型不等式，$\pi/\sin(\pi/p)$ 也是最佳值．

20 世纪 90 年代后，通过构造新的核函数，引入参数，借助近代分析的技巧，研究者们建立了大量与式(2)和式(3)类似的 Hilbert 型不等式，其中积分型的结果参见文献[2]～[9]，离散型的结果参见文献[8]～[13]．值得指出的是，Hilbert 型不等式通常可分为齐次型和非齐次型，而对非齐次离散型的 Hilbert 型不等式，其常数因子的最佳性很难通过构造的方法来证明．因此，研究者们往往会研究其对应的半离散形态，相关成果参见文献[14]～[16]．本文将构建一个包含齐次和非齐次两种形态的半离散型的核函数，借助权系数的方法和分析技巧，建立一个常数因子最佳的半离散的 Hilbert 型不等式．为行文方便，下文约定 $p>1$，$1/p+1/q=1$．

1 引理

引理 1 设 $\lambda>\beta>0$，$\gamma>0$，$K(z):=\ln\dfrac{1+\lambda z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}$，则 $K(z)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调增，且 $K(z)>0$．

收稿日期：2021－11－01
基金项目：浙江省教育厅科研项目(Y202148139)；浙江机电职业技术学院科教融合项目(A－0271－21－206)．
通信作者：有名辉，讲师，研究方向：算子逼近与不等式．

证明 对 $K(z)$ 求导,可得:

$$K'(z)=\frac{\gamma z^{\gamma-1}(\lambda-\beta)}{(1+\lambda z^{\gamma})(1+\beta z^{\gamma})}>0.$$

故 $K(z)$ 在$\mathbf{R}^{+}$ 上单调增,且 $K(z)>K(0)=0$.

证毕.

引理 2 设 $\lambda>\beta>0,\gamma>0>\tau>-\gamma$,$K(z)$ 如引理 1 定义,则

$$\int_0^{\infty}K(z)z^{\tau-1}\mathrm{d}z=\frac{(\lambda^{-\tau/\gamma}-\beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}.\tag{4}$$

证明 由于 $\gamma>0>\tau>-\gamma$,故

$$\lim_{z\to+\infty}z^{\tau}\ln\frac{1+\lambda z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}=\lim_{z\to+\infty}z^{\tau}(\ln\lambda-\ln\beta)=0,$$

且

$$\lim_{z\to0^+}z^{\tau}\ln\frac{1+\lambda z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}=\lim_{z\to0^+}z^{\tau}\ln\left[1+\frac{(\lambda-\beta)z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}\right]=\lim_{z\to0^+}\frac{(\lambda-\beta)z^{\tau+\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}=0.$$

分部积分,可得:

$$\int_0^{\infty}K(z)z^{\tau-1}\mathrm{d}z=$$

$$\frac{1}{\tau}\lim_{z\to+\infty}z^{\tau}\ln\frac{1+\lambda z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}-\frac{1}{\tau}\lim_{z\to0^+}z^{\tau}\ln\frac{1+\lambda z^{\gamma}}{1+\beta z^{\gamma}}-\frac{\lambda\gamma}{\tau}\int_0^{\infty}\frac{z^{\tau+\gamma-1}}{1+\lambda z^{\gamma}}\mathrm{d}z+\frac{\beta\gamma}{\tau}\int_0^{\infty}\frac{z^{\tau+\gamma-1}}{1+\beta z^{\gamma}}\mathrm{d}z=$$

$$\frac{\gamma}{\tau}\left(\int_0^{\infty}\frac{\beta z^{\tau+\gamma-1}}{1+\beta z^{\gamma}}\mathrm{d}z-\int_0^{\infty}\frac{\lambda z^{\tau+\gamma-1}}{1+\lambda z^{\gamma}}\mathrm{d}z\right).\tag{5}$$

在式(5)中,令 $\beta z^{\gamma}=u$,并利用以下等式[17]:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+z)z^{s}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{\sin\pi s}(0<s<1),$$

可得:

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{\tau+\gamma-1}}{1+\beta z^{\gamma}}\mathrm{d}z=\gamma^{-1}\beta^{-1-\tau/\gamma}\int_0^{\infty}\frac{u^{\tau/\gamma}}{1+u}\mathrm{d}u=-\gamma^{-1}\beta^{-1-\tau/\gamma}\frac{\pi}{\sin(\pi\tau/\gamma)}.\tag{6}$$

类似地,令 $\lambda z^{\gamma}=u$,则

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{\tau+\gamma-1}}{1+\lambda z^{\gamma}}\mathrm{d}z=\gamma^{-1}\lambda^{-1-\tau/\gamma}\int_0^{\infty}\frac{u^{\tau/\gamma}}{1+u}\mathrm{d}u=-\gamma^{-1}\lambda^{-1-\tau/\gamma}\frac{\pi}{\sin(\pi\tau/\gamma)}.\tag{7}$$

将式(6)和式(7)代入式(5),可得式(4).

证毕.

引理 3 设 $\lambda>\beta>0,\gamma>0>\tau>-\gamma,a\neq0,b<0$ 且 $b\tau<1$,$K(z)$ 如引理 1 定义. 定义 $\hat{\boldsymbol{a}}=\{\hat{a}_n\}_{n=1}^{\infty},\hat{a}_n=n^{b\tau-1+\frac{b}{qs}}$,其中 s 是充分大的正整数,且

$$\hat{f}(x):=\begin{cases}x^{a\tau-1-\frac{a}{ps}},\ x\in E,\\0,\ x\in\mathbf{R}^{+}\backslash E,\end{cases}$$

其中,$E=\{x:x>0,x^{\operatorname{sgn}a}>1\}$,则

$$\widetilde{L}:=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}K(x^a n^b)\hat{f}(x)\hat{a}_n\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K(x^a n^b)\hat{a}_n\hat{f}(x)\mathrm{d}x>$$

$$\frac{s}{|ab|}\left[\int_0^1K(z)z^{\tau-1+\frac{1}{qs}}\mathrm{d}z+\int_1^{\infty}K(z)z^{\tau-1-\frac{1}{ps}}\mathrm{d}z\right].\tag{8}$$

证明 注意到 s 充分大,$b\tau<1$,故$\hat{a}_n$ 关于n 递减. 根据引理 1 及 $b<0$,又可得 $K(x^a n^b)$ 关于 n 也递减. 令 $x^a t^b=z$,可得:

$$\widetilde{L} > \int_1^{\infty}\int_E K(x^a t^b) x^{a\tau-1-\frac{a}{ps}} t^{b\tau-1+\frac{b}{qs}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|b|}\int_E x^{-a/s-1}\int_0^{x^a} K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

当 $a < 0$ 时，根据 Fubini 定理[18]，可得：

$$\begin{aligned}
&\int_E x^{-a/s-1}\int_0^{x^a} K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \\
&\int_0^1 x^{-a/s-1}\int_0^1 K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-a/s-1}\int_1^{x^a} K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \\
&\frac{s}{|a|}\int_0^1 K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z + \int_1^{\infty} K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \int_0^{z^{1/a}} x^{-a/s-1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \\
&\frac{s}{|a|}\left[\int_0^1 K(z) z^{\tau-1+\frac{1}{qs}} \mathrm{d}z + \int_1^{\infty} K(z) z^{\tau-1-\frac{1}{ps}} \mathrm{d}z\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

结合式(9) 和式(10)，可得式(8). 当 $a > 0$ 时，类似可证式(8) 成立.

证毕.

2 主要结果

定理 1 设 $\lambda > \beta > 0, \gamma > 0 > \tau > -\gamma, a \neq 0, b < 0$ 且 $b\tau < 1$，$K(z)$ 如引理 1 定义. 定义 $\mu(x) = x^{p(1-a\tau)-1}$，$\nu_n = n^{q(1-b\tau)-1}$，$f(x) \in L_{\mu}^{p}(\mathbf{R}^{+})$，$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{\nu}^{q}$，且 $f(x), a_n > 0$，则

$$L := \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} K(x^a n^b) a_n f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} K(x^a n^b) a_n f(x) \mathrm{d}x <$$
$$|a|^{-1/q}\, |b|^{-1/p}\, \frac{(\lambda^{-\tau/\gamma} - \beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)} \|f\|_{p,\mu} \|\boldsymbol{a}\|_{q,\nu}, \tag{11}$$

其中，$|a|^{-1/q}\, |b|^{-1/p}\, \dfrac{(\lambda^{-\tau/\gamma} - \beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}$ 是式(11) 成立的最佳常数因子.

证明 由逐项积分定理，可得 L 的两种表示. 当 $y \in [n-1, n)$ 时，令 $\widetilde{K}(x,y) = K(x^a n^b)$，$g(y) := a_n$，$H(y) := n$. 由 Hölder 不等式得：

$$\begin{aligned}
&L = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \widetilde{K}(x,y) f(x) g(y) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left\{ [\widetilde{K}(x,y)]^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1-a\tau}{q}} [H(y)]^{\frac{b\tau-1}{p}} f(x) \right\} \left\{ [\widetilde{K}(x,y)]^{\frac{1}{q}} [H(y)]^{\frac{1-b\tau}{p}} x^{\frac{a\tau-1}{q}} g(y) \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \\
&\left\{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \widetilde{K}(x,y) [H(y)]^{b\tau-1} x^{\frac{p(1-a\tau)}{q}} f^p(x) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \times \\
&\left\{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \widetilde{K}(x,y) x^{a\tau-1} [H(y)]^{\frac{q(1-b\tau)}{p}} g^q(y) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}} = \\
&\left\{\int_0^{+\infty} \omega(x) x^{\frac{p(1-a\tau)}{q}} f^p(x) \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}(n) n^{\frac{q(1-b\tau)}{p}} a_n^q\right\}^{\frac{1}{q}},
\end{aligned} \tag{12}$$

其中，

$$\omega(x) = \int_0^{+\infty} \widetilde{K}(x,y) [H(y)]^{b\tau-1} \mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} K(x^a n^b) n^{b\tau-1},$$
$$\tilde{\omega}(n) = \int_0^{\infty} K(x^a n^b) x^{a\tau-1} \mathrm{d}x.$$

因 $b\tau < 1$，故 $n^{b\tau-1}$ 关于 n 单调递减. 由 $b < 0$ 及引理 1，可得 $K(x^a n^b)$ 关于 n 也单调递减. 因此令 $x^a u^b = z$，借助引理 2，可得：

$$\omega(x) < \int_0^{\infty} K(x^a u^b) u^{b\tau-1} \mathrm{d}u = \frac{x^{-a\tau}}{|b|}\int_0^{\infty} K(z) z^{\tau-1} \mathrm{d}z = \frac{(\lambda^{-\tau/\gamma} - \beta^{-\tau/\gamma})\pi x^{-a\tau}}{|b|\,\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}. \tag{13}$$

类似可得：

$$\tilde{\omega}(n)=\int_0^{\infty}K(x^a n^b)x^{a\tau-1}\mathrm{d}x=\frac{n^{-b\tau}}{|a|}\int_0^{\infty}K(z)z^{\tau-1}\mathrm{d}z=\frac{(\lambda^{-\tau/\gamma}-\beta^{-\tau/\gamma})\pi n^{-b\tau}}{|a|\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}. \tag{14}$$

将式(13)和式(14)代入式(12)，可得式(11).

下面证明式(11)的常数因子不可改进.

假设存在正常数 A，满足

$$A<|a|^{-1/q}|b|^{-1/p}\frac{(\lambda^{-\tau/\gamma}-\beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}, \tag{15}$$

且

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}K(x^a n^b)a_n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K(x^a n^b)a_n f(x)\mathrm{d}x<A\|f\|_{p,\mu}\|\boldsymbol{a}\|_{q,\nu}, \tag{16}$$

用引理 3 中的 $\hat{a}_n$ 和 $\hat{f}(x)$ 分别取代式(16)中的 a_n 和 $f(x)$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}K(x^a n^b)\hat{a}_n\hat{f}(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K(x^a n^b)\hat{a}_n\hat{f}(x)\mathrm{d}x<A\|\hat{f}\|_{p,\mu}\|\hat{\boldsymbol{a}}\|_{q,\nu}=\\&A\left(\int_E x^{-a/s-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^{b/s-1}\right)^{1/q}<A(s|a|^{-1})^{1/p}\left(1+\int_1^{\infty}t^{b/s-1}\mathrm{d}t\right)^{1/q}=\\&A(s|a|^{-1})^{1/p}(1+s|b|^{-1})^{1/q}.\end{aligned} \tag{17}$$

结合式(8)和式(17)，可得：

$$\frac{1}{|ab|}\left[\int_0^1 K(z)z^{\tau-1+\frac{1}{qs}}\mathrm{d}z+\int_1^{\infty}K(z)z^{\tau-1-\frac{1}{ps}}\mathrm{d}z\right]<A(|a|^{-1})^{1/p}(s^{-1}+|b|^{-1})^{1/q}.$$

令 $s\to+\infty$，并利用式(4)，得

$$|a|^{-1/q}|b|^{-1/p}\frac{(\lambda^{-\tau/\gamma}-\beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}\leqslant A.$$

这显然与式(15)矛盾. 故式(11)的常数因子是最佳值.

证毕.

在定理 1 中，令 $a=-b=1$，则有以下推论：

推论 设 $\lambda>\beta>0,\gamma>0>\tau>-\gamma$，且 $\tau>-1$. 定义 $\mu(x)=x^{p(1-\tau)-1}$，$\nu_n=n^{q(1+\tau)-1}$，$f(x)\in L_{\mu}^{p}(\mathbf{R}^{+})$，$\boldsymbol{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_{\nu}^{q}$，且 $f(x),a_n>0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\ln\frac{n^{\gamma}+\lambda x^{\gamma}}{n^{\gamma}+\beta x^{\gamma}}a_n f(x)\mathrm{d}x<\frac{(\lambda^{-\tau/\gamma}-\beta^{-\tau/\gamma})\pi}{\tau\sin(\tau\pi/\gamma)}\|f\|_{p,\mu}\|\boldsymbol{a}\|_{q,\nu}.$$

3 结 语

通过引入多个参数，构造了一个新的含有对数函数的核函数，并建立了相关的半离散 Hilbert 型不等式. 核函数的构造过程是初等的，但也具有一定的创新性，即所建立的结果同时包含了齐次和非齐次两种情形，且证明过程采用的方法对相关研究工作具有一定的借鉴意义.

参考文献：

[1] HARDY G H，LITTLEWOOD J E，POLYA G. Inequalities[M]. London：Cambridge University Press，1952：255.

[2] YANG B C. On Hilbert's integral inequality [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1998，220 (2)：778-785.

[3] 杨必成. 一个新的零齐次核的 Hilbert 型积分不等式[J]. 浙江大学学报(理学版)，2012，39 (4)：390-392.

[4] 刘琼，龙顺潮．一个核为双曲余割函数的 Hilbert 型积分不等式[J]．数学学报：中文版，2013，56(1)：97－104.

[5] 有名辉，孙霞．一个$\mathbf{R}^2$ 上含双曲函数核的 Hilbert 型不等式[J]．浙江大学学报(理学版)，2020，47(5)：554－558.

[6] YOU M H，GUAN Y. On a Hilbert－type integral inequality with non－homogeneous kernel of mixed hyperbolic functions[J]. Journal of Mathematical Inequalities，2019，13 (4)：1 197－1 208.

[7] 有名辉．一个基本的 Hilbert 型不等式的推广[J]．湖州师范学院学报，2019，42(10)：19－23.

[8] KRNIC M，PECARIC J，PERIC I，et al. Recent Advances in Hilbert－type Inequalities[M]. Zagreb：Element Press，2012：34－73.

[9] 杨必成．算子范数与 Hilbert 型不等式[M]．北京：科学出版社，2009：2－17.

[10] KUANG J C，DEBNATH L. On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2000，245(1)：248－265.

[11] 杨必成．一个较为精密的 Hardy－Hilbert 型不等式及其应用[J]．数学学报(中文版)，2006，49(2)：363－368.

[12] YOU M H. On a new discrete Hilbert－type inequality and its application[J]. Mathematical Inequalities and application，2015，18 (4)：1 575－1 587.

[13] YANG B C. An extension on the Hilbert－type inequality and its reverse[J]. Journal of Mathematical Inequalities，2005，43(5)：580－584.

[14] 杨必成．一个半离散的 Hilbert 不等式 [J]．广东第二师范学院学报，2011，31(3)：1－7.

[15] RASSIAS M T，YANG B C. On half－discrete Hilbert's inequality[J]. Applied Mathematics and Computation，2013，220：75－93.

[16] YANG B C，DEBNATH L. Half－discrete Hilbert－type inequalities[M]. Singapore：World Scientific Publishing，2014：35－40.

[17] 余家荣．复变函数：第 3 版[M]．北京：高等教育出版社，2000：96.

[18] 菲赫金哥尔茨．微积分学教程：第 2 卷[M]．北京：高等教育出版社，2006：436.

On a Half－discrete Hilbert－type Inequality with Parameters

YOU Minghui

(Mathematics Teaching and Research Section，Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering，Hangzhou 310053，China)

Abstract：By constructing a half－discrete kernel function with multiple parameters，which includes both the homogeneous and non－homogeneous forms，and using the method of weight coefficient and the skills of analysis，a new half－discrete Hilbert－type inequality is established. Furthermore，the constant factor of the newly obtained inequality is proved to be the best possible.

Keywords：Hilbert－type inequality；Fubini's theorem；Hölder inequality；Half－discrete form；best constant factor

[责任编辑　高俊娥]