

智能多车协作跟驰模型的稳定性与非线性分析

李冰¹, 叶金丹¹, 宋涛^{1,2}

(1. 湖州师范学院理学院, 浙江湖州 313000; 2. 湖州市数据建模与分析重点实验室, 浙江湖州 313000)

摘要:在车联网环境下, 考虑前方多辆车运动信息对本车的影响, 构建智能多车协作跟驰模型. 通过线性稳定性分析导出模型的稳定性条件, 并利用约化摄动法对模型进行非线性分析, 获得稳定区域的 Burgers 方程及其三角激波解、亚稳定区域的 KdV 方程及其孤立波解, 以及不稳定区域的 mKdV 方程及其扭结—反扭结波解. 结果表明, 考虑车联网因素的新模型能有效缩减车流的不稳定区域, 提高交通流的稳定性.

关键词:跟驰模型; 车联网; 次近邻; 非线性分析; 稳定性

中图分类号: U491

文献标志码: A

文章编号: 1009-1734(2022)10-0000-08

0 引言

车联网和自动驾驶技术的日益成熟, 为解决我国严峻的城市道路交通拥堵问题开辟了新的路径. 在现代智能交通技术背景下, 探索交通流运行的微观动力学机理, 提高道路交通流的稳定性, 仍是交通科学研究的重要领域^[1-2]. 时停时走波、三角激波、孤立波等与交通流稳定性相关联的各种车流密度波也是研究人员重点关注的课题^[3-5].

车辆跟驰模型是交通流微观模型中的一类重要模型. 从车辆跟驰模型出发, 自微观角度利用非线性分析方法研究各类交通流密度波的形成、发展和传播过程, 对解决交通拥堵问题具有至关重要的作用^[3-5]. 在国外, 1999年 Nagatani 针对经典优化速度模型进行了非线性分析^[6], 并对在各种状态下出现的密度波进行了详细的分类研究^[5]; Kurtze 就一般形式的车辆跟驰模型推导出的 Burgers 方程、Korteweg-de Vries (KdV) 方程, 以及修正的 Korteweg-de Vries (mKdV) 方程及其密度波解进行了系统的总结^[3-4]. 国内学者专门针对交通密度波的非线性分析研究始于薛郁, 他应用非线性分析法解析研究了涉及相对速度的优化速度模型的 Burgers、KdV 和 mKdV 方程所对应描述的三角激波、孤立波和扭结—反扭结密度波变化^[7]; 葛红霞将 Nagatani 的研究成果推广至多预期模型^[8]和全速度差模型^[9]; 彭光含研究了考虑双前车信息的跟驰模型的稳定性和各类密度波方程^[10]; 邝华等构建了多预期平均速度效应影响的跟驰模型, 并对其进行了稳定性分析和非线性分析^[11]; 曹芳等研究了考虑智能提示限速信息的跟驰模型的稳定性和各类密度波方程^[12]; 吴春秀等构建后视速度差车辆跟驰模型, 推导出了模型方程的扭结—反扭结波解, 并讨论了参数的选取对交通系统稳定性的影响^[13]. 本文遵循全速度差跟驰模型的基本假设, 通过引入车联网环境, 在仅考虑行驶车辆前方一辆车的基础上引入前方第二辆车, 构建智能多车协作跟驰模型, 分析其稳定性条件和非线性动力学特征, 并给出不同区域内的非线性密度波解.

1 智能多车协作跟驰模型

在车联网环境下, 司机可以实时获取丰富的交通信息服务, 得到周边众多车辆的速度和间距数据, 从

收稿日期: 2021-12-17

基金项目: 浙江省教育厅科研项目(Y202248528); 浙江省自然科学基金项目(Z22A013952); 湖州师范学院大学生创新创业训练科研项目(202001115).

通信作者: 宋涛, 博士, 讲师, 研究方向: 交通科学和交通大数据分析. E-mail: tsong@zjhu.edu.cn

而及时调整自身车速和车间距,以保障驾乘的安全和稳定.研究证实^[1],司机在驾乘过程中,不仅要密切关注最近邻前车的行驶车速和间距变化,还要留意次近邻前车的行驶状态对本车的影响.驾驶员前方两辆车与本车之间的车间距和车速变化会在不同程度上影响行车安全,而且最近邻前车的行驶状态比次近邻前车对本车司机的影响程度更大,司机对车速差异的敏感度也高于车间距差异的刺激.因此,需要利用不同参数来描述次近邻前车与本车之间的车速差异,以及车间距差异对本车行驶状态的影响.在车联网环境下,众多司机在驾驶车辆实时且精确获取前方两辆车的行驶状态变化参数时,就可立刻做出加减速行为.此时,司机相当于利用各自车辆信息协作完成对交通流行为的预判,并作出相应的驾驶操作反应.

全速度差车辆跟驰模型描述了前后两辆车的跟驰行为,在理论分析和模拟仿真领域应用广泛^[14].模型方程为:

$$\ddot{x}_n(t) = \alpha [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + k \Delta v_n(t).$$

根据上述分析,本文以全速度差车辆跟驰模型为基础,考虑前方两辆车的行驶参数,构建智能多车协作跟驰模型(Intelligent multi-vehicle cooperative car-following model):

$$\ddot{x}_n(t) = \alpha [V(\Delta x_n(t), \Delta \tilde{x}_n(t)) - v_n(t)] + k(\Delta v_n(t) + l \Delta \tilde{v}_n(t)), \quad (1)$$

其中, $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ 为第 n 辆车与其最近邻前车的车头间距, $\Delta \tilde{x}_n(t) = x_{n+2}(t) - x_n(t) = \Delta x_n(t) + \Delta x_{n+1}(t)$ 为第 n 辆车与其前方次近邻车辆的车头间距, $\Delta v_n(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t)$ 为第 n 辆车与其最近邻前车的速度差, $\Delta \tilde{v}_n(t) = v_{n+2}(t) - v_n(t) = \Delta v_n(t) + \Delta v_{n+1}(t)$ 为第 n 辆车与其前方次近邻车辆的速度差, $V(\Delta x)$ 为以车头间距为自变量的优化速度函数.研究指明^[15],优化速度函数必须是一条单调递增的 S 形曲线, $(h_l, V(h_l))$ 为其拐点,也称临界点, h_l 为临界车头间距.此处,同时考虑最近邻和次近邻前车车头间距的优化速度函数表达式为 $V(\Delta x_n(t), \Delta \tilde{x}_n(t)) = mV(\Delta x_n(t)) + (1-m)V(\Delta x_{n+1}(t))$. α 为敏感度系数, k 为速度差刺激系数,均大于零; m 和 l 分别表示司机对最近邻和次近邻前车不同行驶参数关注的程度, m 为最近邻前车车头间距刺激系数, l 为次近邻前车速度差刺激系数.一般而言,最近邻前车对本车行驶状态的影响大于次近邻前车对本车的影响,故 m 通常取大于 0.5 的常数值, $0.5 < m \leq 1$; 基于类似的考虑, l 通常取小于 0.5 的常数值, $0 \leq l < 0.5$.

2 线性稳定性分析

交通流的线性稳定性分析是进行非线性分析的前提,是区分稳定性区域的基础^[16].为便于解析分析,将智能多车协作跟驰模型方程(1)改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n(t) = & \alpha [V(\Delta x_n(t), \Delta \tilde{x}_n(t)) - v_n(t)] + k(1+l)\Delta v_n(t) + kl\Delta v_{n+1}(t) = \\ & \alpha [mV(\Delta x_n(t)) + (1-m)V(\Delta x_{n+1}(t)) - \dot{x}_n(t)] + k(1+l)\Delta \dot{x}_n(t) + kl\Delta \dot{x}_{n+1}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

假设车流初始状态为稳定态,各车辆之间车头间距为 h ,对应车辆的优化速度为 $V(h)$,则稳态交通流的车辆位置可表示为:

$$x_n^0(t) = hn + V(h)t.$$

对该均匀流施加一个小扰动 $y_n(t) = \exp(ikn + zt)$,则有:

$$x_n(t) = x_n^0(t) + y_n(t) = hn + V(h)t + y_n(t). \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),并线性化可得:

$$\ddot{y}_n(t) = \alpha [mV'(h)\Delta y_n(t) + (1-m)V'(h)\Delta y_{n+1}(t) - \dot{y}_n(t)] + k(1+l)\Delta \dot{y}_n(t) + kl\Delta \dot{y}_{n+1}(t), \quad (5)$$

其中,

$$V'(h) = \left. \frac{dV(\Delta x_n)}{d\Delta x_n} \right|_{\Delta x_n = h}.$$

将式(5)的 y_n 按傅里叶级数展开,整理化简得:

$$z^2 = \alpha [mV'(h)(e^{ik} - 1) + (1-m)V'(h)e^{ik}(e^{ik} - 1) - z] + k(1+l)z(e^{ik} - 1) + klze^{ik}(e^{ik} - 1). \quad (6)$$

将参数 z 以 $z = z_1 ik + z_2 (ik)^2 + \dots$ 的形式展开,由 ik 的同次幂系数相等得:

$$z_1 = V'(h), z_2 = V'(h) \left[\frac{1+2(1-m)}{2} - \frac{V'(h) - k(1+2l)}{\alpha} \right].$$

当 z_2 为负值时,初始均匀的稳定流状态会变得不稳定;当 z_2 为正值时,稳定流状态保持不变.因此,由 $z_2 = 0$,得智能多车协作跟驰模型的中性稳定性曲线为:

$$\alpha_s = 2 \frac{V'(h) - k(1+2l)}{1+2(1-m)}.$$

当满足如下条件时,交通流处于稳定状态:

$$\alpha > 2 \frac{V'(h) - k(1+2l)}{1+2(1-m)}.$$

由此可知,当不考虑前方次近邻车辆的运动状态信息时, $m=1, l=0$,智能多车协作跟驰模型即为全速度差跟驰模型,稳定性条件变为 $V'(h) < \frac{\alpha}{2} + k$,与文献[14]一致.智能多车协作跟驰模型能够通过引入前方次近邻车辆运动状态的信息,考虑对本车行驶过程的影响,从而在 $\frac{\alpha}{2} + k < V'(h) < \frac{(1+2(1-m))\alpha}{2} + k(1+2l)$ 区域进一步稳定车流,扩大交通流的线性稳定性区域,这种增强车流稳定性的作用充分显示了模型改进的意义.

3 非线性分析

因为交通密度波所研究的非线性交通波在某种意义上是“弱”非线性的,所以能利用小参数描述非线性效应,从而采用各种渐进分析方法来求解方程.最常用的是约化摄动法^[17],其通过适当的坐标变形和摄动展开,将车辆跟驰模型约化成可解的非线性方程(如 Burgers 方程、KdV 方程、mKdV 方程等),并通过讨论各种交通波所对应的密度波解存在的必要条件,探索参数选取对交通流稳定性的影响^[7].

由模型稳定性条件可知,交通流分为 3 个区域:稳定性区域、亚稳定区域和不稳定区域.下面运用约化摄动法,由智能多车协作跟驰模型导出对应不同区域的非线性方程及其密度波解.为便于分析,将方程(1)改写为以下形式:

$$\frac{d^2 \Delta x_n(t)}{dt^2} = \alpha \left\{ m [V(\Delta x_{n+1}(t)) - V(\Delta x_n(t))] + (1-m) [V(\Delta x_{n+2}(t)) - V(\Delta x_{n+1}(t))] - \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \right\} + k(1+l) \left[\frac{d\Delta x_{n+1}(t)}{dt} - \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \right] + kl \left[\frac{d\Delta x_{n+2}(t)}{dt} - \frac{d\Delta x_{n+1}(t)}{dt} \right]. \quad (7)$$

3.1 在稳定区域导出 Burgers 方程和三角激波解

在交通流稳定区域,对空间变量 n 和时间变量 t 引入慢变量:

$$X = \epsilon(n + bt), T = \epsilon^2 t, \quad (8)$$

其中, $0 < \epsilon \ll 1, b$ 为待定参数.设车头间距为:

$$\Delta x_n(t) = h + \epsilon R(X, T). \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(7),并展开至 ϵ^3 量级,得到偏微分方程:

$$\epsilon^2 (b - V'(h)) \partial_X R + \epsilon^3 \left[\partial_T R - \left(\frac{1+2(1-m)}{2} V'(h) - \frac{b^2 - k(1+2l)b}{\alpha} \right) \partial_X^2 R - V''(h) R \partial_X R \right] = 0. \quad (10)$$

令 $b = V'(h)$,消除 ϵ^2 项,化简式(10)得:

$$\partial_T R - V''(h) R \partial_X R = \left(\frac{1+2(1-m)}{2} + \frac{k(1+2l) - V'(h)}{\alpha} \right) V'(h) \partial_X^2 R. \quad (11)$$

因为当 $h > h_l$ 时, $V''(h)$ 为负,且根据稳定性条件 $\alpha > 2 \frac{V'(b) - k(1+l)}{1+2(1-m)}$,在稳定区域 $\frac{1+2(1-m)}{2} + \frac{k(1+2l) - V'(h)}{\alpha}$ 恒为正,所以式(11)是 Burgers 方程,它的一个解为:

$$R(X, T) = \frac{1}{|V''(h)|T} \left(X - \frac{\eta_n + \eta_{n+1}}{2} \right) - \frac{1}{2|V''(h)|T} (\eta_{n+1} - \eta_n) \tanh \left[\frac{A}{4|V''(h)|T} (\eta_{n+1} - \eta_n) (X - \xi_n) \right].$$

这个解是在渐进态 ($T \gg 1$) 下的一系列 N 型三角激波^[18]. 其中,

$$A = \left(\frac{1+2(1-m)}{2} + \frac{k(1+2l) - V'(h)}{\alpha} \right) V'(h),$$

ξ_n 为激波波阵面坐标, η_n 为激波阵面与车辆前进方向 x 轴的斜率. 由上述 Burgers 方程近似描述的三角激波相对行驶车辆向后传播, 传播速度为 $V'(h)$, 其能描述在平稳行驶交通流中偶发的“车队集簇”现象. 由于司机考虑了次近邻前车的车头间距和速度差, 导致 A 增大, 所以交通流会更加稳定.

3.2 在亚稳定区域导出 KdV 方程和孤立波解

在交通流亚稳定区域, 考虑在中性稳定性曲线附近慢变量的变化行为, 在中性稳定性曲线附近对空间变量 n 和时间变量 t 引入缓变量:

$$X = \epsilon(n + bt), T = \epsilon^3 t, \quad (12)$$

其中, $0 < \epsilon \ll 1$, b 为待定参数. 设车头间距为:

$$\Delta x_n(t) = h + \epsilon^2 R(X, T), \quad (13)$$

将式(12)和式(13)代入式(7), 并展开至 ϵ^6 量级, 得到偏微分方程:

$$\begin{aligned} & \epsilon^3 (b - V') \partial_X R + \epsilon^4 \left(\frac{b^2}{\alpha} - \frac{k(1+2l)b}{\alpha} - \frac{1+2(1-m)}{2} V' \right) \partial_X^2 R + \\ & \epsilon^5 \left[\partial_T R - \left(\frac{1+6(1-m)}{6} V' + \frac{k(1+4l)b}{2\alpha} \right) \partial_X^3 R - V'' R \partial_X R \right] + \\ & \epsilon^6 \left[\frac{2b - k(1+2l)}{\alpha} \partial_X \partial_T R - \left(\frac{1+14(1-m)}{24} V' + \frac{k(1+8l)b}{6\alpha} \right) \partial_X^4 R - \frac{1+2(1-m)}{4} V'' \partial_X^2 R^2 \right] = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

其中,

$$V' = \frac{dV(\Delta x_n)}{d\Delta x_n} \Big|_{\Delta x_n = h}, V'' = \frac{d^2 V(\Delta x_n)}{d\Delta x_n^2} \Big|_{\Delta x_n = h}.$$

令

$$\partial_X \partial_T R = \left(\frac{V'}{6} + \frac{k(1+4l)b}{2\alpha} \right) \partial_X^4 R + \frac{V''}{4} \partial_X^2 R^2,$$

消去 ϵ^3 和 ϵ^4 项, 同时在中性稳定曲线 $\alpha_s = 2 \frac{V'(h) - k(1+2l)}{1+2(1-m)}$ 附近, 取 $\alpha = (1 + \epsilon^2) \alpha_s$, $b = V'$, 利用主项平衡法^[19]化简式(14), 得:

$$\partial_T R - f_1 \partial_X^3 R - f_2 R \partial_X R + \epsilon [-f_3 \partial_X^2 R + f_4 \partial_X^4 R + f_5 \partial_X^2 R^2] = 0, \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1+6(1-m)}{6} V' + \frac{k(1+4l)V'}{2\alpha_s}, f_2 = V'', f_3 = -\frac{1+2(1-m)}{2} V', \\ f_4 &= \frac{2V' - k(1+2l)}{\alpha_s} \left[\frac{V'}{6} + \frac{k(1+4l)V'}{2\alpha_s} \right] - \left[\frac{1+14(1-m)}{24} V' + \frac{k(1+8l)V'}{6\alpha} \right], \\ f_5 &= \frac{V'' [2V' - k(1+2l) - (1+2(1-m))\alpha_s]}{4\alpha_s}. \end{aligned}$$

为给出带有高阶小量的标准 KdV 方程, 进行变量代换:

$$X = -\sqrt{f_1} \hat{X}, T = \sqrt{f_1} \hat{T}, R = \frac{1}{f_2} \hat{R}.$$

根据

$$\begin{aligned} \partial_T R &= \frac{1}{\sqrt{f_1} f_2} \partial_{\hat{T}} \hat{R}, \partial_X^2 R = \frac{1}{f_1 f_2} \partial_{\hat{X}}^2 \hat{R}, \partial_X^3 R = -\frac{1}{f_2 f_1^{\frac{3}{2}}} \partial_{\hat{X}}^3 \hat{R}, \\ \partial_X^4 R &= \frac{1}{f_2 f_1^2} \partial_{\hat{X}}^4 \hat{R}, \partial_X R^2 = -\frac{1}{\sqrt{f_1} f_2} \partial_{\hat{X}} \hat{R}^2, \partial_X^2 R^2 = \frac{1}{f_1 f_2^2} \partial_{\hat{X}}^2 \hat{R}^2, \end{aligned}$$

对式(15)化简得:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{T}} + \frac{\partial^3 \hat{R}}{\partial \hat{X}^3} + \hat{R} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{X}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{f_1}} \left(-f_3 \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \hat{X}^2} + \frac{f_4}{f_1} \frac{\partial^4 \hat{R}}{\partial \hat{X}^4} + \frac{f_5}{f_2} \frac{\partial^2 \hat{R}^2}{\partial \hat{X}^2} \right) = 0. \quad (16)$$

(16)式是带有校正项 $o(\epsilon)$ 的 KdV 方程,忽略 $o(\epsilon)$ 项可得标准的 KdV 方程:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{T}} + \frac{\partial^3 \hat{R}}{\partial \hat{X}^3} + \hat{R} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{X}} = 0.$$

结合校正项的可解性条件^[6],可得它的孤立波解及其振幅为:

$$\hat{R}(\hat{X}, \hat{T}) = A \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A}{12}} \left(\hat{X} - \frac{A}{3} \hat{T} \right) \right], A = \frac{21f_1 f_2 f_3}{5f_2 f_4 - 24f_1 f_5},$$

从而得到车头间距的孤立波解为:

$$\Delta x_n(t) = h + \frac{A}{V''} \left(\frac{\alpha}{\alpha_s} - 1 \right) \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{A}{\frac{1+6(1-m)V'}{6} + \frac{k(1+4l)V'}{2\alpha_s}} \left(\frac{\alpha}{\alpha_s} - 1 \right) \left[n + \left(V' + \frac{A}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha_s} - 1 \right) \right) t \right]} \right\}.$$

这个解是在中性稳定性曲线附近得到的.因此,利用 KdV 方程的孤立波解可描述还未发生交通堵塞的拥挤车流中小规模的车辆集簇效应.此时,交通孤立波刻画了车辆在拥挤车流中“时快时慢”的行驶现象.

3.3 在不稳定区域导出 mKdV 方程和扭结—反扭结波解

在交通流不稳定区域,考虑在临界点附近引入缓变量:

$$X = \epsilon(n + bt), T = \epsilon^3 t,$$

其中, $0 < \epsilon \ll 1$, b 为待定参数.设车头间距为 $\Delta x_n(t) = h_l + \epsilon R(X, T)$,将缓变量和车头间距代入式(7)并展开至 ϵ^5 量级,得到偏微分方程:

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 (b - V') \partial_X R + \epsilon^3 \left(\frac{b^2}{\alpha} - \frac{k(1+2l)b}{\alpha} - \frac{1+2(1-m)}{2} V' \right) \partial_X^2 R + \\ & \epsilon^4 \left[\partial_T R - \left(\frac{1+6(1-m)}{6} V' + \frac{k(1+4l)b}{2\alpha} \right) \partial_X^3 R - \frac{V'''}{6} \partial_X R^3 \right] + \\ & \epsilon^5 \left[\frac{2b - k(1+2l)}{\alpha} \partial_X \partial_T R - \left(\frac{1+14(1-m)}{24} V' + \frac{k(1+8l)b}{6\alpha} \right) \partial_X^4 R - \frac{1+2(1-m)}{12} V'' \partial_X^2 R^3 \right] = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

其中,

$$V' = \left. \frac{dV(\Delta x)}{d\Delta x} \right|_{\Delta x = h_l}, V'' = \left. \frac{d^2 V(\Delta x)}{d\Delta x^2} \right|_{\Delta x = h_l}.$$

令

$$\partial_X \partial_T R = \left(\frac{V'}{6} + \frac{k(1+4l)b}{2\alpha} \right) \partial_X^4 R + \frac{V'''}{12} \partial_X^2 R^3,$$

消去 ϵ^2 和 ϵ^3 项,同时在临界车头间距 h_l 附近,取 $\alpha_c = 2 \frac{V'(h_l) - k(1+2l)}{1+2(1-m)}$, $b = V'$,利用主项平衡法^[19]简化式(17)得:

$$\partial_T R - g_1 \partial_X^3 R + g_2 \partial_X R^3 + \epsilon [g_3 \partial_X^2 R + g_4 \partial_X^4 R + g_5 \partial_X^2 R^3] = 0, \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1+6(1-m)}{6} V' + \frac{k(1+4l)V'}{2\alpha_c}, g_2 = -\frac{V'''}{6}, g_3 = \frac{1+2(1-m)}{2} V', \\ g_4 &= \frac{2V' - k(1+2l)}{\alpha_c} \left[\frac{V'}{6} + \frac{k(1+4l)V'}{2\alpha_c} \right] - \left[\frac{1+14(1-m)}{24} V' + \frac{k(1+8l)V'}{6\alpha_c} \right], \\ g_5 &= \frac{V'''}{12\alpha_c} [2V' - k(1+2l) - (1+2(1-m))\alpha_c]. \end{aligned}$$

为给出带有高阶小量的标准 mKdV 方程,进行变量代换:

$$\hat{T} = g_1 T, R = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \hat{R}.$$

根据

$$\begin{aligned} \partial_T R &= g_1 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_{\hat{T}} \hat{R}, \partial_X R = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_X \hat{R}, \partial_X^3 R = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_X^3 \hat{R}, \\ \partial_X^4 R &= \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_X^4 \hat{R}, \partial_X R^3 = \frac{g_1}{g_2} \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_X \hat{R}^3, \partial_X^2 R^3 = \frac{g_1}{g_2} \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \partial_X^2 \hat{R}^3, \end{aligned}$$

对式(18)化简得:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{T}} - \frac{\partial^3 \hat{R}}{\partial X^3} + \frac{\partial \hat{R}^3}{\partial X} + \epsilon \left(\frac{g_3}{g_1} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial X^2} + \frac{g_4}{g_1} \frac{\partial^4 \hat{R}}{\partial X^4} + \frac{g_5}{g_2} \frac{\partial^2 \hat{R}^2}{\partial X^2} \right) = 0. \quad (19)$$

(19)式是带有校正项 $o(\epsilon)$ 的 mKdV 方程,忽略项 $o(\epsilon)$ 可得标准的 mKdV 方程:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{T}} - \frac{\partial^3 \hat{R}}{\partial X^3} + \frac{\partial \hat{R}^3}{\partial X} = 0.$$

结合校正项的可解性条件^[6],可得它的扭结—反扭结波解及其波速为:

$$\hat{R}(X, \hat{T}) = \sqrt{C} \tanh \frac{\sqrt{C}}{2} (X - \hat{C}\hat{T}), C = \frac{5g_2g_3}{2g_2g_4 - 3g_1g_5},$$

从而得到车头间距的扭结—反扭结波解为:

$$\Delta x_n(t) = h_l \pm \sqrt{\frac{g_1 C}{g_2} \left| 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha} \right|} \tanh \left[\sqrt{\frac{C}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha} \right| \left(n + \left(1 - Cg_1 \left| 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha} \right| \right) t \right) \right].$$

显然,此处扭结—反扭结波解的波幅 $A = \sqrt{\frac{g_1 C}{g_2} \left| 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha} \right|}$.

扭结—反扭结波解表示车流运动的共存相,包括低密度的自由运动相和高密度的拥挤相.共存曲线可以在车头间距—敏感度相图中利用 $\Delta x_n(t) = h_l \pm A$ 给出,自由运动相和拥挤相的车头间距分别为 $\Delta x_n(t) = h_l + A$ 和 $\Delta x_n(t) = h_l - A$.这在一定程度上表明,扭结—反扭结波刻画了车流常见的时停时走波,是车辆之间相互作用引发的交通密度波的传播.

选取优化速度函数为高速公路实测函数 $V_j(h)$ ^[15],其具体形式为:

$$V_j(h) = 16.8 \times \{ \tanh[0.086 \times (h - 25) + 0.913] \} \text{ (m/s)},$$

当参数 (k, m, l) 取不同值时,可得到不同的智能多车协作跟驰模型所对应的车头间距—敏感度相图,如图 1 所示.在图 1 中,实线表示中性稳定性曲线,虚线表示共存曲线.

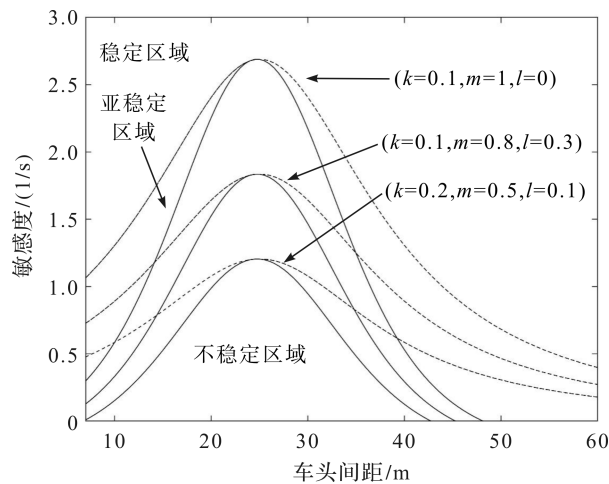


图 1 车头间距—敏感度相图

Fig. 1 Phase diagram in the headway - sensitivity space

对每一组参数 (k, m, l) 取值,交通流稳定性的 3 个区域均可在图 1 中区分:共存曲线之上为稳定区域,中性稳定性曲线与共存曲线之间为亚稳定区域,中性稳定性曲线下方为不稳定区域.从不同参数组对应的车流稳定性区域变化可以看出,在车联网环境下考虑前方次近邻车辆运动信息对本车的影响,可使中性稳定曲线和共存曲线位置相对下降,从而扩大稳定区域,这与前述从线性稳定性分析得到的解析结果一致.根据前述的非线性分析推导过程可以看出,仅需要在均匀交通流引入的小扰动中设置不同的小参数,即可在临界点附近观测到扭结—反扭结波,在中性稳定性曲线附近观测到孤立波,也在共存曲线上方观测到三角激波.这 3 类非线性密度波出现在对应的交通流稳定性的 3 个不同区域.

4 结语

本文在车联网环境下,利用全速度差跟驰模型,并考虑本车与前方次近邻车辆运动状态信息的关系,构建了智能多车协作跟驰模型.稳定性条件表明,改进模型进一步增大了线性稳定性区域,增强了车流的稳定性.非线性分析结果表明,改进模型可在线性稳定、亚稳定和不稳定区域利用约化摄动法推导出 Burgers、KdV 和 mKdV 方程,以及与其对应的三角激波、孤立波及扭结—反扭结波.这 3 类交通非线性密度波能够描述在车流拥堵状态下“车队集簇”“时快时慢”“时停时走”的交通现象.

参考文献:

- [1] 华雪东,王炜,王昊.考虑车与车互联通讯技术的交通流跟驰模型[J].物理学报,2016,65(1):44-55.
- [2] 秦严严,余海燕,何兆益,等.车联网环境下自动驾驶交通流建模与分析[J].武汉科技大学学报,2019,42(6):469-473.
- [3] KURTZE D A. Solitons and kinks in a general car-following model[J]. Physical Review E,2013,88:032 804.
- [4] KURTZE D A. Development of kinks in car-following models[J]. Physical Review E,2017,95(3):032 221.
- [5] NAGATANI T. The physics of traffic jams[J]. Reports on Progress in Physics,2002,65(9):1 331-1 386.
- [6] MURAMATSU M, NAGATANI T. Soliton and kink jams in traffic flow with open boundaries[J]. Physical Review E,1999,60(1):180-187.
- [7] XUE Y. Analysis of the stability and density waves for traffic flow[J]. Chinese Physics,2002,11(11):1 128-1 134.
- [8] GE H X, DAI S Q, DONG L Y, et al. Stabilization effect of traffic flow in an extended car-following model based on an intelligent transportation system application[J]. Physical Review E,2004,70(6):066 134.
- [9] GE H X, CHENG R J, DAI S Q. KdV and kink-antikink solitons in car-following models[J]. Physica A,2005,357(3~4):466-476.
- [10] 彭光含.双车跟驰模型稳定性及非线性分析[J].四川大学学报(自然科学版),2009,46(4):1 057-1 064.
- [11] KUANG H, WANG M T, LU F H, et al. An extended car-following model considering multi-anticipative average velocity effect under V2V environment[J]. Physica A,2019,527:121 268.
- [12] 曹芳,化存才.含智能提示限速的全速度差模型的稳定性和孤立波[J].云南民族大学学报(自然科学版),2020,29(4):338-343.
- [13] 吴春秀,陈明玉.车辆跟驰模型的扭结—反扭结波解[J].泉州师范学院学报,2021,39(2):23-27.
- [14] JIANG R, WU Q, ZHU Z. Full velocity difference model for a car-following theory[J]. Physical Review E,2001,64(1):017 101.
- [15] 宋涛,董力耘,邝华,等.考虑停车视距的优化速度函数[J].上海大学学报(自然科学版),2011,17(2):147-152.
- [16] 韩祥临,欧桥,王心宇,等.车辆跟驰模型稳定的充分必要条件[J].湖州师范学院学报,2021,43(2):1-6.
- [17] 戴世强.约化摄动法和非线性波远场分析[J].力学进展,1982,4(1):2-23.

- [18] TATSUMI T, KIDA S. Statistical mechanics of the Burgers model of turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1972, 55(4): 659 - 675.
- [19] 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 110 - 116.

Stability and Nonlinear Analysis of Intelligent Multi - vehicle Cooperative Car - following Model

LI Bin¹, YE Jindan¹, SONG Tao^{1,2}

(1. School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, China;

2. Huzhou Key Laboratory of Data Modeling and Analysis, Huzhou 313000, China)

Abstract: In internet of vehicles environment, an intelligent multi - vehicle cooperative car - following model was improved considering the influence of the motion information of multiple vehicles ahead on the vehicle. The stability condition was derived through linear stability analysis, and nonlinear analysis was carried out by using the reduced perturbation method. The Burgers equation and triangular shock wave in the stable region, KdV equation and solitary wave in the metastable region, mKdV equation and kink - anti - kink wave in the unstable region were obtained. The results show that the improved model in internet of vehicles environment can effectively reduce the linear instability area of vehicular flow and improve the stability of traffic flow.

Keywords: car - following model; internet of vehicles; second nearest neighbor; nonlinear analysis; stability

[责任编辑 高俊娥]